తెలంగాణ రాష్ట్ర విద్యామండలి

ఇంటర్మీడియట్

ప్రథమ సంవత్సరం

గణితశాస్త్రం IB

ప్రాథమిక అభ్యసన దీపిక

Basic Learning Material

విద్యా సంవత్సరం: **2021-2022**

తెలంగాణ రాష్ట్ర విద్యామండలి

ఇంటర్మీడియట్ ప్రథమ సంవత్సరం

గణితశాస్త్రం-I

(తెలుగు మీడియం)

ప్రాథమిక అభ్యసన దీపిక

(BASIC LEARNING MATERIAL)

విద్యా సంవత్సరం

2021-2022

Coordinating Committee

Sri Syed Omer Jaleel, IAS
Commissioner, Intermediate Education &
Secretary, Telangana State Board of Intermediate Education
Hyderabad

Dr. Md. Abdul Khaliq
Controller of Examinations
Telangana State Board of Intermediate Education

Educational Research and Training Wing

Ramana Rao Vudithyala
Reader

Mahendar Kumar Taduri
Assistant Professor

Vasundhara Devi Kanjarla
Assistant Professor

Learning Material Contributors

S.S.R.S RAGHUVEER, M.Sc., PGDCA
Junior Lecturer in Mathematics,
Chitanya Kalasala,
B.N. Reddy Nagar,
HYDERBAD

B. RAJASRI, M.Sc.
Junior Lecturer in Mathematics,
Maharshi Veda Vignan Mahavidyalaya
Junior College,
Begumpet, **HYDERBAD**

B. MRUTYUNJAYA, M.Sc.
Junior Lecturer in Mathematics,
Government Junior College,
PATANCHERU
SANGAREDDY DIST.

M. VIJITH KUMAR, M.Sc. B.Ed.
Junior Lecturer in Mathematics,
Government Junior College,
LUXETTIPET

J. RAVI KIRAN, M.Sc., B.Ed.
Junior Lecturer in Mathematics,
Government Junior College Boys,
NIRMAL

T. SREEDHAR, M.Sc., PGDCA
Junior Lecturer in Mathematics,
Government Junior College (A&C),
KARIMNAGAR

ప్రవేశిక

సమస్త ప్రపంచాన్ని అతలాకుతలం చేస్తూ ఉన్న కరోనా మహమ్మారి మన జీవితంలోని ప్రతి రంగాన్ని ప్రభావితం చేసింది. విద్యారంగం కూడా దానికి అతీతమేమీ కాదు. భౌతికంగా తరగతులను పూర్తిగా నిర్వహించడానికి వీలుకాని పరిస్థితుల్లో, తెలంగాణా ప్రభుత్వ ఇంటర్మీడియట్ విద్యాశాఖ దూరదర్శన్ పాఠాల ద్వారా విద్యను మారుమూల ప్రాంతాలకు సైతం అందించింది. కరోనా మహమ్మారి వల్ల తలెత్తిన ఈ సంక్షోభ పరిస్థితుల నేపథ్యంలో తెలంగాణ ఇంటర్మీడియట్ విద్యాశాఖ బోధనకూ మరియు రాబోయే 2021 పరీక్షలకూ కేవలం 70% సిలబస్ ను మాత్రమే పరిగణనలోకి తీసుకోవడం ద్వారా విద్యార్థులపై పాఠ్యప్రణాళికా భారాన్ని తగ్గించింది. విద్యార్థుల సౌకర్యార్థం వార్షిక పరీక్షల ప్రశ్నాపత్రాలలో గణనీయంగా ఛాయిస్‌ను పెంచింది.

విద్యార్థులు పరీక్షల భయాన్ని, ఒత్తిడిని తట్టుకుని ఇంత తక్కువ సమయంలో వార్షిక పరీక్షలకు విజయవంతంగా ఎదుర్కోవడానికి తెలంగాణ రాష్ట్ర ఇంటర్మీడియట్ విద్యా శాఖ "ప్రాథమిక అభ్యసన దీపిక" (Basic Learning Material) ను రూపొందించింది. ఇది విద్యార్థులు పరీక్షలను ధైర్యంగా ఎదుర్కొనే ఒక కరదీపికగా పనిచేస్తుంది. ఇక్కడ గమనించాల్సిన విషయం ఏమిటంటే ఈ అభ్యసన దీపిక సమగ్రమైనది కాదు. అదెంత మాత్రమూ పాఠ్య పుస్తకానికి ప్రత్యామ్నాయం కాదు. నిజం చెప్పాలంటే ఇది విద్యార్థులు తమ వార్షిక పరీక్షలలో రాయాల్సిన సమాధానాలలోని అత్యావశ్యకమైన సోపానాలను అందించి వాటి ఆధారంగా తమ తమ సమాధానాలను మరింత మెరుగ్గా మార్చుకోవడానికి తోడ్పడుతుంది. మీరు మీ పాఠ్య పుస్తకాలను క్షుణ్ణంగా చదివిన తర్వాత ఈ అభ్యసన దీపికను చదివితే అప్పుడది పాఠ్య పుస్తకాల నుండి, ఉపాధ్యాయుల నుండి మీరు నేర్చుకున్న భావనలను, విషయాలను బలోపేతం చేయడంలో తోడ్పడుతుంది. అతి తక్కువ వ్యవధిలో ఈ అభ్యసన దీపికను మీ ముందుంచడంలో అహర్నిశలూ శ్రమించిన ERTW బృందాన్ని, విషయ నిపుణుల బృందాన్ని మనస్ఫూర్తిగా అభినందిస్తున్నాను.

ఈ అభ్యసన దీపికను మరింత సుసంపన్నం చేయడంలోనూ, ఏ అంశంలోనైనా ఒక్క లోపం కూడా లేకుండా ఈ దీపికను తీర్చిదిద్దడంలోను విద్యావ్యవస్థతో ముడిపడివున్న అందరి నుండీ సూచనలను, సలహాలను కోరుకొంటున్నాను.

ఈ అభ్యసన దీపికల్ని మన వెబ్‌సైట్ www.tsbie.cgg.gov.in ద్వారా పొందవచ్చు.

కమీషనర్ & సెక్రెటరీ

ఇంటర్మీడియట్ విద్యాశాఖ, తెలంగాణ

CONTENTS

యూనిట్ - 1	**బిందుపథం**	**1**
యూనిట్ - 2	**అక్ష పరివర్తనము**	**7**
యూనిట్ - 3	**సరళరేఖ**	**13**
యూనిట్ - 4	**సరళరేఖ యుగ్మాలు**	**44**
యూనిట్ - 5	**త్రిపరిమాణ నిరూపకాలు**	**56**
యూనిట్ - 6	**దిక్ కొసైన్‌లు, దిక్ సంఖ్యలు**	**59**
యూనిట్ - 7	**సమతలం**	**65**
యూనిట్ - 8	**అవధులు**	**67**
యూనిట్ - 9	**అవకలనం**	**74**
యూనిట్ - 10	**దోషాలు-ఉజ్జాయింపులు**	**85**

యూనిట్ **1**

బిందుపథం

నిర్వచనం: నిర్దిష్ట నియమమునకు లోబడి చలించే బిందువు యొక్క మార్గమును నిర్దేశించే బీజీయ సమీకరణమును బిందుపథ సమీకరణము అందురు.

బిందు పథ సమీకరణము కనుగొను విధానము

సోపానము 1: బిందువు $P(h, k)$ అనుకొనుము.

సోపానము 2: దత్త నియమమునకు సంబంధించిన సూత్రమును ఉపయోగించుము.

సోపానము 3: సూక్ష్మీకరించుము.

సోపానము 4: సూక్ష్మీకరించబడిన సమీకరణమును బిందుపథ సమీకరణము సూచించును.

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (4 మార్కులు)

1. $A(4, -3)$ బిందువు నుండి 5 యూనిట్ల దూరంలో చలించే బిందువు యొక్క బిందుపథ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: $P(h, k)$ ఏదేని ఒక బిందువు.

$A(4, -3)$ దత్త బిందువు.

$|PA| = 5$ దత్త నియమము.

$\Rightarrow |PA|^2 = 25$

$(h-4)^2 + (x+3)^2 = 25$ (రెండు బిందువుల మధ్యదూరం $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$)

బిందుపథము $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$

$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 25 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

2. $A(-3, 2), A(0, 4)$ ల నుండి సమాన దూరములో చలించే బిందువు బిందుపథ సమీకరణమును కనుగొనుము. బిందువు నుండి 5 యూనిట్ల దూరంలో చలించే బిందువు యొక్క బిందుపథ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: $P(x, y)$ ఏదేని ఒక బిందువు.

$|PA| = |PB|$ దత్త నియమము.

$\Rightarrow |PA|^2 = |PB|^2$

TSBIE

$(h+3)^2 + (k-2)^2 \Rightarrow h^2 + (k-4)^2$

$h^2 + 6h + 9 + k^2 - 4k + 4 = h^2 + k^2 - 8k + 16$

$6h - 4k + 13 = -8x + 16$

$6h + 4k = 3$

$\therefore$ బిందుపథ సమీకరణము $6x + 4y - 3 = 0$

3. **P అను బిందువుకు మూలబిందువు నుండి గల దూరము, A(1, 2) బిందువుకు గల దూరానికి రెండు రెట్లు అయితే P బిందుపథమును కనుగొనుము.**

సాధన: P(h, k) ఏదేని ఒక బిందువు.

O(0, 0) మూల బిందువు.

A(1, 2) దత్త బిందువు.

|PO| = 2|PA| దత్త నియమము.

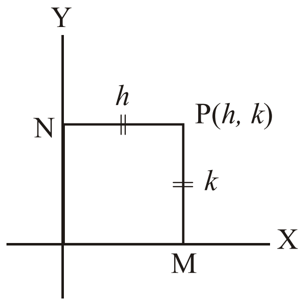
$\Rightarrow |PO|^2 = 4\,|PA|^2$

$h^2 + k^2 = 4[(h-1)^2 + (k-2)^2]$

సూక్ష్మీకరించగా $3h^2 + 3k^2 - 8h - 16k + 20 = 0$

బిందుపథ సమీకరణము $= 3x^2 + 3y^2 - 8x - 16y + 20 = 0$

4. **నిరూపకాక్షాల నుండి సమాన దూరంలో చలించే బిందువు యొక్క బిందుపథమును కనుగొనుము.**



సాధన: ఏదేని ఒక దత్త బిందువు = P(h, k)

X అక్షము నుండి దూరము = |PM|

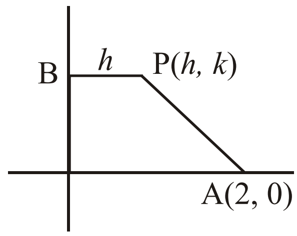
Y అక్షము నుండి దూరము = |PN|

$|PM| = |PN| \Rightarrow |PM|^2 = |PN|^2$

$k^2 = h^2$.

బిందుపథ సమీకరణము $y^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = y^2$

5. **A(2, 0) నుండి మరియు Y-అక్షము నుండి సమాన దూరంలో చలించే బిందువు యొక్క బిందుపథమును కనుగొనుము.**



సాధన: ఏదేని ఒక దత్త బిందువు = P(h, k)

దత్త బిందువు = A(2, 0)

దత్త నియమము $|PA| = h$

$|PA|^2 = h^2 \Rightarrow (h-2)^2 + k^2 = h^2$

సూక్ష్మీకరించగా బిందుపథ సమీకరణము $y^2 - 4x^2 + 4 = 0$.

6. **A(a, 0), B($-a$, 0) బిందువులతో $|PA|^2 + |PB|^2 = 2c^2$ నియమమునకు లోబడి చలించే బిందువు యొక్క బిందుపథ సమీకరణమును కనుగొనుము.**

సాధన: ఏదేని ఒక బిందువు = P(h, k)

దత్త బిందువులు = A(a, 0), B($-a$, 0)

TSBIE

దత్త నియమము $|PA|^2 + |PB|^2 = 2c^2$

$(h-a)^2 + k^2 + (h+a)^2 + k^2 = 2c^2$

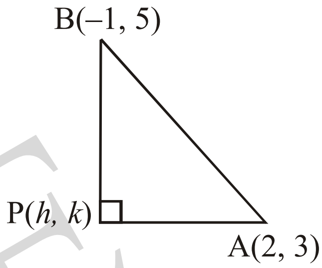
సూక్ష్మీకరించగా $h^2 + k^2 = c^2 - a^2$

$\therefore$ బిందుపథ సమీకరణము $x^2 + y^2 = c^2 - a^2$.

7. (2, 3) మరియు (–1, 5) బిందువులను కలిపే రేఖ P అను బిందువు వద్ద లంబకోణమును చేయుచుంటే దాని బిందుపథ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: ఏదేని ఒక బిందువు = $P(h, k)$

దత్త బిందువులు = A(2, 3), B(–1, 5)



PA వాలు $m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k-3}{h-2}$

PB వాలు $m_2 = \frac{k-5}{h+1}$

దత్త నియమము $PA \perp PB$

$m_1 \times m_2 = -1$

$\Rightarrow \frac{k-3}{h-2} \times \frac{k-5}{h+1} = -1$

సూక్ష్మీకరించగా $h^2 + k^2 - h - 8k + 13 =$

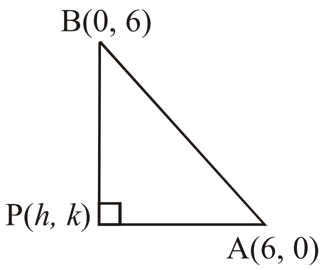
$\therefore$ బిందుపథ సమీకరణము $x^2 + y^2 - x - 8y + 13 = 0$.

8. ఒక లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క కర్ణాగ్రమములు (6, 0) మరియు (0, 6) అయిన మూడవ శీర్షము యొక్క బిందుపథమును కనుగొనుము.

సాధన: ఏదేని ఒక బిందువు అనగా మూడవ శీర్షము = $P(h, k)$

దత్త బిందువులు లేదా లంబకోణ త్రిభుజ కర్ణాగ్రములు = (6, 0), (0, 6)

PA వాలు $m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k-0}{h-0}$



PB వాలు $m_2 = \frac{k-6}{h-0}$

దత్త నియమము $PA \perp PB$

$m_1 \times m_2 = 1$

$\Rightarrow \frac{k}{h-6} \times \frac{k-6}{h} = -1$

$\Rightarrow k^2 - 6k = [h^6 - 6h]$

సూక్ష్మీకరించగా $h^2 + k^2 - 6h - 6k = 0$.

$\therefore$ బిందుపథ సమీకరణము $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$.

TSBIE

9. (−5, 0) మరియు (3, 0) బిందువుల నుండి ఒక బిందువుకు గల దూరముల భేదము 8 యూనిట్లు లేదా ప్రమాణములు అయితే ఆ బిందువు యొక్క బిందుపథ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: ఏదేని ఒక బిందువు = P(h, k)

దత్త బిందువులు = A(–5, 0), B(3, 0)

దత్త నియమము |PA – PB| = 8

|PA| = 8 + |PB|

వర్గము చేయగా

$|PA|^2 = [8 + |PB|]^2$

సూక్ష్మీకరించగా $|PA|^2 - |PB|]^2 - 64 = 16\ PB$

$[(h+5)^2 + k^2] - [(h-5)^2 + k^2] - 64 = 16\,|PB|$

$\Rightarrow 20h - 64 = 16\,|PB|$

$\Rightarrow 5h - 16 = 4\,|PB|$

$\Rightarrow (5h - 16)^2 = 16\,|PB|^2$

$\Rightarrow (5h - 16)^2 = 16\,[(h - 5) + k^2]$

సూక్ష్మీకరించగా $\dfrac{h^2}{16} - \dfrac{k^2}{9} = 1$

$\therefore$ బిందుపథ సమీకరణము $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

10. A(4, 0), B(–4, 0) బిందువులతో |PA – PB| = 4 నియమమును పాటించే బిందువు యొక్క బిందుపథ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: ఏదేని ఒక బిందువు = P(h, k)

దత్త బిందువులు = A(4, 0), B(–4, 0)

దత్త నియమము |PA – PB| = 4

$\Rightarrow |PA| = 4 + |PB|$

$[|PA|^2 - |PB|^2] - 16 = 8\,|PB|$

$[(h-4)^2 + k^2] - [(h+4)^2 + k^2] - 16 = 8|PB|$

$-16h - 16 = 8\,|PB|$

$4(h + 1)^2 = (h + 4)^2 + k^2$

సూక్ష్మీకరించగా $3h^2 - k^2 = 12$

$\therefore$ బిందుపథ సమీకరణము $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$.

11. A(2, 3), B(2, –3) బిందువులతో PA + PB = 8 నియమమును పాటించే P బిందువు యొక్క బిందుపథ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: ఏదేని ఒక బిందువు = P(h, k) అనుకొనుము.

TSBIE

దత్త బిందువులు = A(2, 3), B(2, –3)

దత్త నియమము |PA| + |PB| = 8

$\Rightarrow |PA| = 8 - |PB|$

$[|PA|^2 - |PB|^2] - 64 = -16\,|PB|$

$[(h-2)^2 + (k-3)^2] - [(h-2)^2 + (k+3)^2] - 64 = -16|PB|$

$-12k - 64 = -16\,|PB|$

$(3k + 16)^2 = 16[(h-2)^2 + (k+3)^2]$

సూక్ష్మీకరించగా $16h^2 + 7k^2 - 64h - 48 = 0$

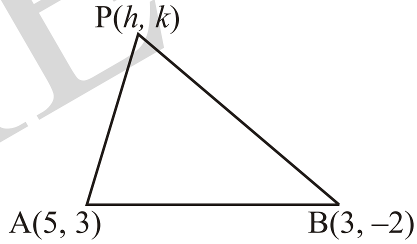
$\therefore$ బిందుపథ సమీకరణము $16x^2 + 7y^2 - 64x - 48 = 0$.

12. A(5, 3), B(3, –2) బిందువులతో P బిందువు ఏర్పరిచే త్రిభుజ వైశాల్యం 9 చ.యూ. అయితే P బిందుపథ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: త్రిభుజము యొక్క ఒక శీర్షము = P(*h*, *k*) అనుకొనుము.

దత్త బిందువులు = A(5, 3), B(3, –2)

దత్త నియమము |PA| + |PB| = 8



Δ PAB వైశాల్యం $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} h & k \\ 5 & 3 \\ 3 & -2 \\ h & k \end{vmatrix} = 9$

$|3h - 5k - 10 - 9 - 36k + 2h| = 18$

$|5h - 2k - 19| = 18$

$(5h - 2k - 1)(5h - 2k - 37) = 0$

$\therefore$ బిందుపథ సమీకరణము $(5h - 2k - 1)(5h - 2k - 37) = 0$.

TSBIE

Practice Problem

A(1, 1), B(–2, 3) బిందువులతో P బిందువు ఏర్పరిచే త్రిభుజ వైశాల్యం 8.5 యూనిట్లు లేదా ప్రమాణములు అయితే P బిందుపథమును కనుగొనుము.

13. (2, 3), (2, –3) బిందువుల నుండి P బిందువుకు గల దూరముల నిష్పత్తి 2:3 అయితే P బిందుపథమును కనుగొనుము.

సాధన: (2, 3) మరియు (2, –3)త్రిభుజము యొక్క ఒక శీర్షము = P(*h*, *k*) అనుకొనుము.

ఏదేని ఒక బిందువు = P(*h*, *k*) అనుకొనుము.

దత్త బిందువులు = A(2, 3), B(2, –3)

దత్త నియమము $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow 3|PA| = 2|PB|$

$9|PA|^2 = 4\,|PB|^2$

$9[(h-2)^2+(k-3)^2] = 4[(h-2)^2+(k+3)^2]$

సూక్ష్మీకరించగా $5h^2 + 5k^2 - 20h - 78k + 65 = 0$

$\therefore$ బిందుపథ సమీకరణము $5x^2 + 5y^2 - 20x - 78y + 65 = 0$.

14. A(1, 2), B(2, –3) మరియు C(–2, 3) లు మూడు బిందువులు. P అను బిందువు $|PA|^2 + |PB|^2 = 2|PC|^2$ నియమమును పాటిస్తే P యొక్క బిందుపథము $7x - 7y + 4 = 0$ అని చూపుము.

సాధన: ఏదేని ఒక బిందువు = $P(h, k)$ అనుకొనుము.

$|PA|^2 + |PB|^2 = (h-1)^2+(k-2)^2+(h-2)^2+(k+3)^2$

$2\,|PC|^2 = 2[(h+2)^2+(k-3)^2]$

$|PA|^2 + |PB|^2 = 2\,|PC|^2$ లో ప్రతిక్షేపించి

సూక్ష్మీకరించగా $7h - 7k + 4 = 0$

$\therefore$ బిందుపథ సమీకరణము $7x - 7y + 4 = 0$.

*****

TSBIE

యూనిట్ **2**

అక్షపరివర్తనము

నిర్వచనం: నిరూపకాక్షాల దిశను మార్చకుండా మూలబిందువును ఇచ్చిన బిందువుకు మార్చితే ఏర్పడు పరివర్తనను సమాంతర అక్షపరివర్తన (translation of axis) అందురు.

$P(x, y)$ బిందువు యొక్క మొదటి నిరూపకాలు.

$P(x, y)$ అదే బిందువుకు రూపాంతరము చెందిన తరువాత నిరూపకాలు.

$x = PQ = ON = OL + LN = OL + O'M = h + X = X + h$

$y = PN = PM + MN = Y + O'L = Y + k$

$\therefore\ x = X + h,\ y = Y + k \Rightarrow X = x - h,\ Y = y - k$

$P(x, y) = (X + h, Y + k)$

$P(X, Y) = (x - h, y - k)$

$(h, k) = (x - X, y - Y)$

వక్రము యొక్క మొదటి సమీకరణము $f(x, y)$

వక్రము యొక్క రూపాంతర సమీకరణము $f(X, Y)$

భ్రమణ పరివర్తనము: మూలబిందువు యొక్క స్థానమును మార్చకుండా నిరూపకాక్షాలను సమాన కోణములతో భ్రమణము చేయిస్తే ఏర్పడు పరివర్తనను భ్రమణ పరివర్తనము (rotation of axes) అందురు.

$x = OL = OQ - LQ = X\cos\theta - NM$

$= X\cos\theta - Y\sin\theta.$

$y = PL = PN + NL = PN + MQ$

$= PM\cos\theta + OM\sin\theta$

$= Y\cos\theta + X\sin\theta = X\sin\theta + Y\cos\theta.$

$P(x, y) = (X\cos\theta - Y\sin\theta, X\sin\theta + Y\cos\theta)$

θ	X	Y
x	cosθ	–sinθ
x	sinθ	cosθ

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (4 మార్కులు)

1. మూలబిందువును (4, –5) కు మార్చితే (సమాంతర పరివర్తన ద్వారా) ఈ దిగువ బిందువులకు రూపాంతర నిరూపకములను కనుగొనుము.

సాధన: (i) (0, 3)

$x = 0,\quad y = 3\quad h = 4\quad k = -5$

$X = x - h\quad Y = y - k$

$X = -4\quad Y = 8\quad$ Ans: (4, –8)

(ii) (–2, 4)

$x = -2\quad y = 4\quad h = 4\quad k = -5$

$X = x - h\quad Y = y - k$

$X = -4 - 2 = -6\quad Y = 4 + 5 = 9\quad$ Ans: (–6, 9)

(iii) (4, –5)

$x = 4\quad y = -5\quad h = 4\quad k = -5$

$(X, Y) = (x - h, y - k) = (4 - 4, -5(-5)) = (0, 0)$

2. మూలబిందువును (2, 3) కు సమాంతర పరివర్తన ద్వారా మార్చితే P బిందువు యొక్క మారిన నిరూపకములను దిగువనీయబడితే, P బిందువు యొక్క అసలు నిరూపకములను కనుగొనుము.

సాధన: (i) (4, 5)

$X = 4\quad Y = 5\quad h = 2\quad k = 3$

$x = X + h\quad y = Y + k$

$x = 6\quad Y = 8\quad$ Ans: (6, 8)

(ii) (–4, 3)

$X = -4\quad Y = 3\quad h = 2\quad k = 3$

$x = X + h\quad y = Y + k$

$x = -2\quad Y = 6\quad$ Ans: (–2, 6)

(iii) (0, 0)

$X = 0\quad Y = 0\quad h = 2\quad k = 3$

$x = X + h\quad y = Y + k$

$x = 2\quad Y = 3\quad$ Ans: (2, 3)

3. (3, 0) బిందువును (2, –3) బిందువుకు రూపాంతరము చేయుటకు మార్చవలసిన బిందువు నిరూపకములను కనుగొనుము.

సాధన: $(x, y) = (3, 0)$ దత్త బిందువు

$(X, Y) = (2, -3)$ రూపాంతర బిందువు

$(h, k) = (x - X, y - Y) = (3 - 2, 0 - (-3)) = (1, 3)$

4. మూల బిందువును (–1, 2) కు సమాంతర అక్షపరివర్తన ద్వారా మార్చితే ఈ దిగువనీయబడిన సమీకరణములకు రూపాంతర సమీకరణములను కనుగొనుము.

సాధన: (1) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

$(h, k) = (-1, 2)$

TSBIE

$x = X + h = X - 1$ $y = Y + k = Y + 2$

ప్రతిక్షేపించగా $(X-1)^2 + (Y+2)^2 + 2(X-1) - 4(Y+2) + 1 = 0$

సూక్ష్మీకరించగా $X^2 + Y^2 - 4 = 0$ రూపాంతర సమీకరణం.

(2) $2x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$

$x = X + h = X - 1$ $y = Y + k = Y + 2$

ప్రతిక్షేపించగా $2(X-1)^2 + (Y+2)^2 - 4(X-1) + 4(Y+2) = 0$

సూక్ష్మీకరించగా $2[X^2 - 2X + 1] + [Y^2 + 4Y + 4] - 4X + 4 + 4Y + 8 = 0$

$2X^2 + Y^2 - 8X + 8Y + 18 = 0$ రూపాంతర సమీకరణం.

5. ఈ దిగువన మార్చబడిన మూలబిందు సరూపకములు మరియు రూపాంతర సమీకరణములు ఈయబడినవి. అశలు వేదముల సమీకరణములను కనుగొనుము.

సాధన: (1) $(3, -4)$, $x^2 + y^2 = 4$

సౌలభ్యము కొరకు దత్త రూపాంతర సమీకరణమును $x^2 + y^2 = 4$ ...... (1) తో

సూచించే మూలబిందువు $(h, k) = (3, -4)$

$X = x - h$ $Y = y - k$

$X = x - 3$ $Y = y + 4$

(1) లో ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించగా అసలు లేదా మూల సమీకరణము

$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$ అగును.

(2) $(-1, 2)$, $x^2 + y^2 + 16 = 0$

మార్చబడిన మూలబిందువు $(h, k) = (-1, 2)$

దత్త రూపాంతర సమీకరణము $x^2 + 2y^2 + 16 = 0$

సౌలభ్యము కొరకు $x^2 + 2y^2 + 16 = 0$ తో సూచించుదుము. ....(1)

$X = x - h = x + 1$ $Y = y - k = y - 2$

(1) లో ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించగా అసలు లేదా మూల సమీకరణము

$x^2 + 2y^2 + 2x - 8y + 25 = 0$ అగును.

6. $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ సమీకరణము యొక్క రూపాంతర సమీకరణములో మొదటి ఘాతపు పదములను లోపింపచేయుటకు మార్చవలసిన మూలబిందువు నిరూపకములను కనుగొనుము.

సాధన: దత్త సమీకరణము $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$

రూపాంతర సమీకరణము

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) = 4(X+h)^2 + 9(Y+k)^2 - 8(X+h) + 36(Y+k) + 4 = 0$$

X, Y పదములు లోపింపచేయుటకు

X గుణకము మరియు Y గుణకములను '0' కు సమానము చేయగా

$8h - 8 = 0 \Rightarrow h = 1$

TSBIE

$18k + 36 = 0 \Rightarrow k = -2$

మార్చవలసిన మూలబిందువు నిరూపకములు $(h, k) = (1, -2)$ లేదా

$\left(\dfrac{hf - bg}{ab - h^2}, \dfrac{gh - af}{ab - h^2}\right)$ సూత్రమును ఉపయోగించవచ్చు.

7. మూలబిందువును (2, 3) బిందువుకు మార్చినపుడు రూపాంతర సమీకరణము $x^2 + 3xy - 2y^2 + 17x - 7y - 11 = 0$ అయితే వక్రము యొక్క అసలు లేదా మూల సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: రూపాంతర సమీకరణము $x^2 + 3xy - 2y^2 + 17x - 7y - 11 = 0$

సౌలభ్యము కొరకు $X^2 + 3XY - 2Y^2 + 17X - 7Y - 11 = 0$ అనుకొందాం. …… (1)

$(h, k) = (2, 3)$

$X = x - h = x - 2 \qquad Y = y - k = y - 3$

(1) లో ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించగా

$(x-2)^2 + 3(x-2)(y-3) - 2(y-3)^2 + 17(x-2) - 7(y-3) - 11 = 0$

అసలు లేదా మూల సమీకరణము $x^2 + 3xy - 2y^2 + 4x - y - 20 = 0$

అతి స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. నిరూపకాక్షాలను 30^0 కోణము భ్రమణము చేయిస్తే ఈ దిగువనీయబడిన బిందువుల మారిన నిరూపకములను వ్రాయుము.

సాధన: (i) (0, 5) $\qquad \theta = 30^o$

$X = x\cos\theta + y\sin\theta = 5\sin 30^o = \dfrac{5}{2}$

$Y = -x\cos\theta + y\cos\theta = 5\cos 30^o = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

$(X, Y) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

(ii) (–2, 4) $\qquad \theta = 30^o$

$X = -2\cos 30^o + 4\sin 30^o = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{4}{2} = 2 - \sqrt{3}$

$Y = -2\sin 30^o + 4\cos 30^o = \dfrac{+2}{2} + \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} + 1$

$\left(2 - \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1\right)$

(iii) (0, 0) $\qquad \theta = 30^o$ $\qquad$ గృహము వద్ద ప్రయత్నించుము.

TSBIE

2. నిరూపకాక్షాలను 60^0 కోణము భ్రమణము చేయించినపుడు ఈ దిగువనీయబడిన బిందువుల క్రొత్త నిరూపకములకు అసలు లేదా మూల నిరూపకములను వ్రాయుము.

సాధన: (i) $(X, Y) = (3, 4) \qquad \theta = 60^o$

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta = 3\cos60^o - 4\sin60^o = \frac{3-4\sqrt{3}}{2}$$

$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta = 3\sin60^o + 4\cos60^o = \frac{3\sqrt{3}+4}{2}$$

$$(x, y) = \left(\frac{3-4\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}+4}{2}\right)$$

(ii) $(-7, 2) = (X, Y) \qquad \theta = 60^o$

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta = -7\cos60^o - 2\sin60^o = \frac{-7-2\sqrt{3}}{2}$$

$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta = -7\sin60^o + 2\cos60^o = \frac{2-7\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ans:}\left(\frac{-7-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2-7\sqrt{3}}{2}\right)$$

(iii) $(2, 0) = (X, Y) \qquad \theta = 60^o$

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta = 2\cos60^o - 0\sin60^o = 1$$

$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta = 2\sin60^o + 0\cos60^o = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$(x, y) = \left(1, \sqrt{3}\right)$$

3. నిరూపకాక్షాలను $\pi/6$ కోణము భ్రమణము చేయించగా $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2a^2$ యొక్క రూపాంతర సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: $\theta = \pi/6$

$$f(x, y) = x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2a^2$$

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta = X\cos\frac{\pi}{6} - Y\sin\frac{\pi}{6} = \frac{X\sqrt{3}}{2} - \frac{Y}{2}$$

$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta = X\sin\frac{\pi}{6} + Y\cos\frac{\pi}{6} = \frac{X}{2} + \frac{Y\sqrt{3}}{2}$$

రూపాంతర సమీకరణము $= f(X, Y)$

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}X - Y}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}X - Y}{2}\right)\left(\frac{X + Y\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{X + Y\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2a^2$$

సూక్ష్మీకరించగా $X^2 - Y^2 = a^2$.

TSBIE

4. నిరూపకాక్షాలను $\pi/4$ కోణము భ్రమణము పరివర్తన చేయించగా $3x^2+10xy+3y^2=9$ యొక్క రూపాంతర సమీకరణమును వ్రాయుము.

సాధన: $\theta=\pi/4$

$$f(x,\ y)=3x^2+10xy+3y^2=9$$

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$$

$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$$

ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించగా $8X^2-2Y^2=9$ రూపాంతర సమీకరణమవుతుంది.

5. నిరూపకాక్షాలను α కోణము భ్రమణము పరివర్తన చేయగా $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ యొక్క రూపాంతర సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: $x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha$

$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha$

ప్రతిక్షేపించగా

$$(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)\cos\alpha + (X\sin\alpha + Y\cos\alpha)\sin\alpha = p$$

$$X(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=p$$

$X = p.$

6. నిరూపకాక్షాలను 45^0 కోణము భ్రమణము చేయిస్తే రూపాంతర సమీకరణము $17x^2-16xy+17y^2=225$ అయినచో వక్రము యొక్క అసలు లేదా మూల సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: భ్రమణ కోణము $=\theta=45^o$

రూపాంతర సమీకరణము సౌలభ్యము కొరకు

$$17X^2-16XY+17Y^2=225$$

$X = x\cos\theta + y\sin\theta \qquad Y = -x\sin\theta + y\cos\theta$

$$=\frac{x+y}{\sqrt{2}} \qquad =\frac{-x+y}{\sqrt{2}}$$

$25x^2+9y^2=225$ ంచి సూక్ష్మీకరించగా

$$17\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2-16\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right)+17\left(\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right)^2=225$$

$$25x^2+9y^2=225$$

$X(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=p$ మూల సమీకరణము లేదా అసలు సమీకరణము అవుతుంది.

*****

TSBIE

యూనిట్ **3**

సరళరేఖ

అభ్యాసం 2a

గమనిక:

1 X- అక్షం ధనదిశలో అపసవ్యదిశలో L అనే ఊర్ధ్వేతర రేఖ 'θ' కోణం చేస్తే $\tan\theta$ ను ఆ సరళరేఖ వాలు అంటారు.

$$m = \tan\theta$$

2. X- అక్షం, X- అక్షానికి సమాంతర రేఖ వాలు సున్న.

3. Y- అక్షం, Y- అక్షానికి సమాంతర రేఖ వాలు నిర్వచించలేము.

4. $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ అనే రెండు బిందువుల ద్వారా పోవు రేఖ వాలు $(m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

5. L అనే ఒక సరళరేఖ X-అక్షాన్ని A(A, 0) వద్ద, Y-అక్షాన్ని B(0, b) వద్ద ఖండిస్తే a, b లను X-, Y- అంతరఖండాలు అంటారు.

సరళరేఖ వివిధ రూపాలు

6. m వాలుతో, Y-అంతరఖండం C చేసే సరళరేఖ సమీకరణం $y = mx + c$ (వాలు అంతరఖండ రూపం)

7. అంతరఖండ రూపం $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

8. **బిందువు-వాలు:** m వాలు కలిగి, (x_1, y_1) బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖ $y - y_1 = m(x - x_1)$.

9. $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణం $y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$ (రెండు బిందువుల రూపం).

10. $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ మూడు బిందువులు సరేఖీయాలు $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (లేదా)

AC వాలు = AB వాలు (లేదా) ΔABC వైశాల్యం = 0.

ప్రశ్నలు

1. $(at_1^2, 2at_1)$ $(at_2^2, 2at_2)$ **బిందువుల ద్వారా పోయే సరళరేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన: $A(at_1^2, 2at_1)$, $B(at_2^2, 2at_2)$

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

$$y - 2at_1 = \left(\frac{2at_2 - 2at_1}{at_2^2 - at_1^2}\right)(x - at_1^2)$$

$$y - 2at_1 = \frac{2a(t_2 - t_1)}{a(t_2^2 - t_1^2)}(x - at_1^2)$$

$$y - 2at_1 = \frac{2(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)}(x - at_1^2)$$

$$(t_2 + t_1)(y - 2at_1) = 2(x - at_1^2)$$

$$(t_1 + t_2)y - (t_1 + t_2)2at_1 = 2x - 2at_1^2$$

$$x - 2at_1^2 - (t_1 + t_2)y + (t_1 + t_2)2at_1 = 0$$

$$x - 2at_1 - (t_1 + t_2)y + 2at_1^2 + 2at_1t_2 = 0$$

$$2x - (t_1 + t_2)y + 2at_1t_2 = 0$$

2. **(2, 5), (x, 3) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ వాలు 2 అయితే x విలువ కనుక్కోండి.**

సాధన: A(2, 5), B(x, 3), m = 2

AB వాలు $(m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-5}{x-2} = 2$

$$-2 = 2(x - 2)$$

$$2x - 4 = -2$$

$$2x = -2 + 4 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1.$$

3. **(3, 4), (2, 7) బిందువులను కలిపే రేఖ (–1, 4), (0, 6) బిందువులను కలిపే రేఖకు సమాంతరంగా ఉంటే y విలువ కనుక్కోండి.**

సాధన: A(3, 4), B(2, 7), C(–1, 4), D(0, 6)

AB వాలు = CD వాలు

$$\frac{7-y}{2-3} = \frac{6-4}{0-(-1)} \Rightarrow \frac{7-y}{-1} = \frac{2}{1}$$

$$7 - y = -2 \Rightarrow 7 + 2 = y \Rightarrow y = 9.$$

TSBIE

4. $ab \neq 6$ అయినపుడు (a, 0), (h, k), (0, b) బిందువులు సరేఖీయాలు కావడానికి నియమం కనుక్కోండి.

సాధన: A(a, 0), B(h, k), C(0, b)

A, B, C లు సరేఖీయాలు $\Leftrightarrow$ AC వాలు = AB వాలు

$$\frac{b-0}{0-a} = \frac{k-0}{h-a} \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{k}{h-a}$$

$$\Rightarrow -b(h-a) = ak$$

$$\Rightarrow -bh + ab = ak \Rightarrow ak + bh = ab$$

$$\frac{ak}{ab} + \frac{bh}{ab} = \frac{ab}{ab} \Rightarrow \frac{h}{a} + \frac{k}{b} = 1$$

5. ధన X- అక్షంతో ధనదిశలో 150° కోణంచేస్తూ (−2, −1) బిందువు గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: $\theta = 150^o$, A(–2, –1)

$m = \tan150^o = \tan(90 + 60) = -\cot60^o = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

వాలు $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ కలిగి బిందువు (–2, –1) ద్వారా పోవు రేఖ సమీకరణం

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y + 1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x+2)$$

$$\sqrt{3}(y+1) = -(x+2)$$

$$\sqrt{3}y + \sqrt{3} = -(x+2)$$

$$\sqrt{3}(y+1) = -x-2$$

$$x + \sqrt{3}y + 2 + 2 + \sqrt{3} = 0$$

అభ్యాసం:

(6, 3), (–4, 5) బిందువుల గుండా పోయే రేఖకు (i) సమాంతరంగా, (ii) లంబంగా ఉన్న సరళరేఖల వాలులు కనుక్కోండి.

6. సరళరేఖ ధన X-అక్షం ధనదిశతో చేసే కోణం 60°, దాని X-అంతరఖండం 3 గా గల సరళరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: $\theta = 60^o$, C = 3, $m = \tan60^o = \sqrt{3}$

$\therefore$ కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం y = mx + c.

$$y = \sqrt{3}x + 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x - y + 3 = 0$$

TSBIE

7. మూలబిందువు గుండాపోతూ నిరూపక అక్షాలతో సమాన కోణాలు చేసే సరళరేఖ సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

సాధన: O(0, 0)

నిరూపక అక్షాలతో సమాన కోణాలు

అనగా $\theta = 45^o, 135^o$.

$m = \tan 45^o$ లేదా $\tan 135^o$

$m = 1$ లేదా $\tan 135^o = \tan(180^o - 45^o) = -\tan 45^o = -1$

$m = \pm 1$

∴ మూలబిందువు గుండా పోతూ వాలు ±1 గా గల సరళరేఖ సమీకరణం

$(y-0) = \pm 1(x-0)$

$y = \pm 1$

$x + y = 0$ లేదా $x - y = 0$

8. బిందువు (2, 3) గుండాపోతూ నిరూపక అక్షాలతో చేసే శూన్యేతర అంతరఖండాల మొత్తం సున్న అయ్యే సరళ రేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: అంతరఖండాల మొత్తం = సున్న, A(2, 3)

$a + b = 0 \Rightarrow a = -b$

అంతరఖండ రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{a}=1 \Rightarrow x-y=a \qquad .....(1)$$

కాని ఇది A(2, 3) గుండా పోతుంది.

$2 - 3 = a \Rightarrow a = -1$

కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం (1) నుండి

$x - y = -1$

$x - y + 1 = 0$

9. (−4, 5) బిందువుగుండాపోతూ నిరూపక అక్షాలతో సమాన శూన్యేతర అంతరఖండాలు చేసే సరళరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: A = (–4, 5)

దత్తాంశం ప్రకారం a = b

అంతరఖండ రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{a}=1 \Rightarrow x+y=a \qquad .....(1)$$

TSBIE

కాని ఇది A(–4, 5) గుండా పోతుంది.

$-4 + 3 = a \Rightarrow a = 1$

కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం (1) నుండి

$x + y = 1$

$x + y - 1 = 0$

10. A(–1, 3) బిందువుగుండాపోతూ B(2, –5), C(4, 6) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖకు (i) సమాంతరంగా, (ii) లంబంగా ఉండే సరళరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: A(–1, 3), B(2, –5), C(4, 6)

BC వాలు $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-5)}{4-2} = \frac{6+5}{2} = \frac{11}{2}$

(i) BC రేఖకు సమాంతర రేఖ వాలు $= \frac{11}{2}$

వాలు $\frac{11}{2}$ గా కలిగి బిందువు A(–1, 3) గుండా పోవు

$y - 3 = \frac{11}{2}(x - (-1)$

$2(y-3) = 11(x+1)$

$2y - 6 = 11x + 11$

$11x - 2y + 17 = 0$

(ii) BC రేఖకు లంబంగా ఉండే రేఖ వాలు $= \frac{-1}{m}$

$= -\frac{1}{\left(\frac{11}{2}\right)} = \frac{-2}{11}$

వాలు $\frac{-2}{11}$ గా కలిగి బిందువు A ద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణం

$y - 3 = \frac{-2}{11}(x - (-1)$

$11(y-3) = -2(x+1)$

$11y - 33 = -2x - 2$

$2x + 11y - 31 = 0$

TSBIE

అభ్యాసం 2b

గమనిక:

1 ఒక సరళరేఖ మూలబిందువు నుంచి P దూరంలో ఉండి, మూలబిందువు నుంచి దానికి గీసిన అభిలంబ కిరణం ధన X-అక్షంతో అపసవ్యదిశలో α కోణం చేస్తే, ఆ సరళరేఖ సమీకరణం

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$$

2. (x_1, y_1) బిందువు గుండాపోతూ ధన, X-అక్షంతో అపసవ్యదిశలో θ కోణం చేసే సరళరేఖ సమీకరణం

$(x - x_1) : \cos\theta = (y - y_1) : \sin\theta$

3. $\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta}$ అనుకుంటే

$x = x_1 + r\cos\theta,\ y = y_1 + r\sin\theta$ ని పరామితీయ సమీకరణం అంటారు. ఇక్కడ $|r|$ అనేది సరళరేఖ మీద (x, y) బిందువు నుంచి (x_1, y_1) బిందువు వరకు గల దూరాన్ని సూచిస్తుంది.

4. $ax + by + c = 0$ ని సరళరేఖ సాధారణ రూపం అంటారు.

వాలు $(m) = \dfrac{-a}{b}$

ప్రశ్నలు

1. $x + y + 1 = 0$ సమీకరణాన్ని అభిలంబరూపంలోకి మార్చండి.

సాధన: $x + y + 1 = 0$

$ax + by + c = 0$ యొక్క అభిలంబరూపం

$$\frac{-ax}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{-(b)y}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{ఇక్కడ } c > 0$$

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ చే భాగించగా

$$\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)x + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)y = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \ldots\ldots(1)$$

దీనిని $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$ తో పోల్చగా

$$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}},\ \sin\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}},\ P = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{4}$$

TSBIE

∴ కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం

$$x\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+y\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2. $4x - 3y + 12 = 0$ సమీకరణాన్ని (a) వాలు అంతరఖండ రూపం, (b) అంతరఖండ రూపం, (c) అభిలంబరూపంలోకి మార్చండి.

సాధన: $L = 4x - 3y + 12 = 0$

(a) వాలు అంతరఖండ రూపం $y = mx + c = 0$

$$\Rightarrow 4x+12=3y$$

$$y=\frac{4x+12}{3}$$

$$y=\left(\frac{4}{3}\right)x+4$$

$$\Rightarrow m=\frac{4}{3},\ c=4$$

(b) అంతరఖండ రూపం $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$$\Rightarrow 4x-3y+12=0$$

$$-4x+3y=12$$

$$\frac{-4x}{12}+\frac{3y}{12}=\frac{12}{12}$$

$$\frac{x}{(-3)}+\frac{y}{(4)}=1$$

$$\Rightarrow a=-3,\ b=4$$

(c) అభిలంబ రూపం $(x\cos\alpha+y\sin\alpha=\text{P})$

$$4x-3y+12=0$$

$$-4x+3y=12$$

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-4)^2+(3)^2}=\sqrt{16+9}=5$ చే భాగించగా

$$\frac{-4x}{5}+\frac{3y}{5}=\frac{12}{5}$$

$$\cos\alpha=\frac{-4}{5},\ \sin\alpha=\frac{3}{5},\ \text{P}=\frac{12}{5}$$

TSBIE

3. $\sqrt{3}x + y = 4$ **సమీకరణాన్ని (a) వాలు అంతరఖండ రూపం, (b) అంతరఖండ రూపం, (c) అభిలంబరూపంలోకి మార్చండి.**

సాధన: $L = \sqrt{3}x + y = 4$

(a) వాలు అంతరఖండ రూపం $y = mx + c = 0$

$$\sqrt{3}x + y = 4$$

$$\Rightarrow y = -\sqrt{3}x + 4$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{-3},\ c = 4$$

(b) అంతరఖండ రూపం $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$\sqrt{3}x + y = 4$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{y}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{x}{\left(4/\sqrt{3}\right)} + \frac{y}{(4)} = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}},\ b = 4$$

(c) అభిలంబ రూపం $(x\cos\alpha + y\sin\alpha = P)$

$$\sqrt{3}x + y = 4$$

$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$ చే భాగించగా

$$\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{4}{2}$$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\alpha = \frac{1}{2},\ P = 2$$

$$\Rightarrow \alpha = 30^{o} = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore x\cos\frac{\pi}{6} + y\sin\frac{\pi}{6} = 2$$

TSBIE

4. **రేఖ $y = \sqrt{3}x$ కు సమాంతరంగా ఉంటూ Q(2, 3) గుండా పోయే ఒక సరళరేఖ $2x + 4y - 27 = 0$ రేఖను P వద్ద ఖండిస్తుంది. PQ దూరాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన: $y = \sqrt{3}x$ ....(1) $2x + 4y - 27 = 0$ ....(2)

(1) కి సమాంతర రేఖవాలు కూడా $\sqrt{3}$ అవుతుంది.

$m = \sqrt{3} = \tan 60^{o} \Rightarrow \theta = 60^{o}$

$\theta = 60^{o}$ మరియు Q(2, 3)

$P = (x, y) = (x_1 + r\cos\theta,\ y_1 + r\sin\theta)$

$P = (2 + r\cos\theta,\ 3 + r\sin\theta)$

$$= \left(2 + r\left(\frac{1}{2}\right),\ 3 + r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= \left(2 + \frac{r}{2},\ 3 + \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$$

కాని ఇది (2) గుండా పోతుంది.

$$2\left(2 + \frac{r}{2}\right) + 4\left(3 + \frac{\sqrt{3}r}{2}\right) - 27 = 0$$

$$2\left(\frac{4+r}{2}\right) + 4\left(\frac{6 + \sqrt{3}r}{2}\right) = 27$$

$$4 + r + 12 + 2\sqrt{3}r = 27$$

$$(2\sqrt{3}r + 1)r = 11$$

$$\Rightarrow r = \frac{11}{2\sqrt{3}+1} = \frac{11}{2\sqrt{3}+1} \times \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-1} = \frac{11(2\sqrt{3}-1)}{12-1}$$

$$\Rightarrow r = \frac{11(2\sqrt{3}-1)}{11} = 2\sqrt{3} - 1$$

$$\therefore PQ = |r| = 2\sqrt{3} - 1$$

5. **$x = 0,\ y = 0,\ 3x + 4y = a\ (a > 0)$ సరళరేఖలతో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యం 6 అయితే, a విలువ కనుక్కోండి.**

సాధన: $3x + 4y = a$

$$\frac{3x}{a} + \frac{4y}{a} = \frac{a}{a} \Rightarrow \frac{x}{\left(\frac{a}{3}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{a}{4}\right)} = 1 \qquad .... (1)$$

TSBIE

నిరూపక అక్షాలతో, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ రేఖతో ఏర్పడి త్రిభుజ వైశాల్యం $\Delta=\frac{1}{2}|ab|$

$$\therefore\ \Delta=\frac{1}{2}\left|\frac{a}{3}\times\frac{a}{4}\right|=6\Rightarrow\frac{a^2}{12}=12$$

$$\Rightarrow a^2=144\Rightarrow a=\sqrt{144}$$

$$\therefore\ a=12.$$

6. $\boldsymbol{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$ **సమీకరణాన్ని** $\boldsymbol{a>0, b>0}$ **అభిలంబరూపంలోకి రూపాంతరం చేయండి. ఆ రేఖకు మూలబిందువు నుంచి లంబదూరం P అయితే** $\boldsymbol{\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$ **అని చూపండి.**

సాధన: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}$ చే భాగించగా

$$\frac{\left(x/a\right)}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}+\frac{\left(y/b\right)}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$$

$$x\left(\frac{1}{a\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\right)+y\left(\frac{1}{b\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$$

దత్తాంశం ప్రకారం $\mathrm{P}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\Rightarrow\frac{1}{\mathrm{P}}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$

ఇరువైపులా వర్గంచేయగా

$$\frac{1}{\mathrm{P}^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

7. **సరళరేఖ నిరూపక అక్షాలతో చేసే అంతరఖండాలు** $\boldsymbol{a, b}$. **మూలబిందువు స్థిరంగా ఉంచి అక్షాలను ఒక్క దత్తకోణం గుండా తిప్పినప్పుడు ఆ రేఖ L నూతన అక్షాలతో చేసే అంతరఖండాలు** $\boldsymbol{p, q}$ **అయితే** $\boldsymbol{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}}$ **అని చూపండి.**

TSBIE

సాధన: అంతరఖండ రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ....(1)

అక్షాల భ్రమణ కోణం θ అనుకొనుము.

$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta,\ \ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

∴ (1) యొక్క నూతన అక్షాలు

$$\frac{x'\cos\theta - y'\sin\theta}{a}+\frac{x'\sin\theta + y'\cos\theta}{b}=1$$

$$\frac{b(x'\cos\theta - y'\sin\theta)+a(x'\sin\theta + y'\cos\theta)}{ab}=1$$

$$\frac{bx'\cos\theta - by'\sin\theta + ax'\sin\theta + ay'\cos\theta}{ab}=1$$

$$\frac{\left(a\sin\theta + b\cos\theta\right)x'}{ab}\frac{(a\cos\theta - b\sin\theta)y'}{ab}=1$$

$$\frac{x'}{\left(\frac{ab}{a\sin\theta + b\cos\theta}\right)}\frac{y'}{\left(\frac{ab}{a\cos\theta - b\sin\theta}\right)}=1 \quad ....(2)$$

దత్తాంశం ప్రకారం

$$p=\frac{ab}{a\sin\theta + b\cos\theta},\ q=\frac{ab}{(a\cos\theta - b\sin\theta)}$$

$$\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}=\left(\frac{1}{p}\right)^2+\left(\frac{1}{q}\right)^2$$

$$=\left(\frac{a\sin\theta + b\cos\theta}{ab}\right)^2+\left(\frac{a\cos\theta - b\sin\theta}{ab}\right)^2$$

$$=\frac{a^2\sin^2\theta + b^2\cos\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta + a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2ab\cos\theta\sin\theta}{(ab)^2}$$

$$=\frac{a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{a^2b^2}=\frac{a^2(1)+b^2(1)}{a^2b^2}$$

$$=\frac{a^2}{a^2b^2}+\frac{b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

TSBIE

అభ్యాసం 3c

గమనిక:

1 $L_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ L_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ అయిన L_1, L_2 ల ఖండన బిందువు

$$\left(\frac{b_1c_1 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$$

2. $L = ax + by + c = 0$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ బిందువులు అయితే $L_{11} = ax_1 + by_1 + c_1 = 0$, $L_{22} = ax_2 + by_2 + c_2 = 0$ గా సూచిస్తే

(a) L_1, L_2 లకు ఒకే గుర్తులుంటే $L = 0$ కి A, B లు ఒకే వైపున ఉంటాయి.

(b) L_{11}, L_{22} లకు ఒకే గుర్తులుంటే A, B లు $L = 0$ కి చెరో వైపున ఉంటాయి.

3. (a) $\overline{AB}$ రేఖాఖండాన్ని X-అక్షం విభజించు నిష్పత్తి $= -y_1 : y_2$

(a) $\overline{AB}$ రేఖాఖండాన్ని Y-అక్షం విభజించు నిష్పత్తి $= -x_1 : x_2$

4. $L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = 0$ లు అనుషక్త రేఖలు $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ లేదా

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$$

TSBIE

ప్రశ్నలు

1. (0, 0), (–2, 1) బిందువులను కలుపు రేఖాఖండాన్ని $2x + 3y = 5$ సరళరేఖ విభజించు నిష్పత్తి కనుక్కోండి. ఆ బిందువులు సరళరేఖకు ఒకే వైపున ఉన్నాయా, చెరోవైపున ఉన్నాయా తెలపండి.

సాధన: $L \equiv 2x + 3y = 5$, $A(0, 0)$, $B(-2, 1)$

$L_{11} \equiv 2(0) + 3(0) = 5$

$L_{11} = -5 < 0$

$L_{22} \equiv 2(-2) + 3(1) - 5 = -4 + 3 - 5 = -6$

$L_{22} = -6 < 0$

$\overline{AB}$ రేఖాఖండాన్ని $L = 0$ రేఖ విభజించు నిష్పత్తి $= -L_1 : L_2$

నిష్పత్తి $= -(-5) : (-6) = -5:6$

$L_{11} < 0, L_{22} < 0$ కనుక L_{11}, L_{22} లు ఒకే గుర్తులు కలిగి ఉన్నాయి.

$\therefore$ A, B లు $L = 0$ కి ఒకేవైపున ఉన్నాయి.

2. $2x - 3y + k = 0, 3x - 4y - 13 = 0, 8x - 11y - 33 = 0$ రేఖలు అనుషక్తాలు అయితే k విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: $L_1 \equiv 2x - 3y + k = 0$, $L_2 \equiv 3x - 4y - 13 = 0$, $L_3 \equiv 8x - 11y - 33 = 0$

L_1, L_2, L_3 లు అనుషక్తాలు.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 & k \\ 3 & -4 & -13 \\ 8 & -11 & -33 \end{vmatrix} = 0$$

$2(132 - 143) + 3(-99 + 104) + k(-33 + 32) = 0$

$2(-11) + 3(5) + k(-1) = 0$

$\therefore\ k = -7.$

3. నిరూపక అక్షాలతోను, ఒక సరళరేఖతోను మొదటి పాదంలో ఏర్పడిన త్రిభుజ వైశాల్యం 24 చ॥ యూనిట్లు. ఆ సరళరేఖ (3, 4) బిందువు గుండా పోతుంటే దాని సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: నిరూపక అక్షాలు $x = 0, y = 0$, A(3, 4)

అంతరఖండరూపంలో సరళరేఖ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ....(1)

నిరూపక అక్షాలు, (1) తో ఏర్పడిన త్రిభుజ వైశాల్యం = 24 చ.యూ.

$\frac{1}{2}|ab| 24 \Rightarrow ab = 48 \Rightarrow b = \frac{48}{a}$ ....(2)

కాని సమీకరణం (1), A గుండా పోతుంది.

$\frac{3}{a} + \frac{4}{b} = 1 \Rightarrow \frac{3}{a} + \frac{4}{\left(\frac{48}{a}\right)} = 1$ ((2) నుండి)

$\Rightarrow \frac{3}{a} + \frac{4a}{48} = 1 \Rightarrow \frac{36 + a^2}{12a} = 1$

$\Rightarrow 36 + a^2 = 129$

$\Rightarrow a^2 - 129 + 36 = 0$

$\Rightarrow (a - 6)^2 = 0$

$\therefore\ a = 6.$

(2) నుండి $b = \frac{48}{6} = 8$

$\therefore$ కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం (1) నుండి

$\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1 \Rightarrow \frac{4x + 3y}{24} = 1$

$4x + 3y = 24$

$4x + 3y - 24 = 0.$

TSBIE

4. $3a + 2b + 4c = 0$ అయితే $ax + by + c = 0$ సమీకరణం ఒక అనుషక్త రేఖల కుటుంబాన్ని సూచిస్తుందని చూపండి. అనుషక్త బిందువును కనుక్కోండి.

సాధన: $3a + 2b + 4c = 0$

4 చే భాగించగా ($\because$ c గుణకం)

నిరూపక అక్షాలు, (1) తో ఏర్పడిన త్రిభుజ వైశాల్యం = 24 చ.యూ.

$$\frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{4c}{4} = 0$$

$$a\left(\frac{3}{4}\right) + b\left(\frac{1}{2}\right) + c = 0 \quad ....(1)$$

$\therefore$ $ax + by + c = 0$ సమీకరణం ద్వారా వచ్చే సరళరేఖల కుటుంబంలో ప్రతిరేఖ స్థిరబిందువు $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ గుండా పోతుంది.

కాబట్టి a, b, c లు పరామితీయ విలువలకు $ax + by + c = 0$ ద్వారా వచ్చే రేఖల సమితి అనుషక్త రేఖల కుటుంబం అవుతుంది.

$\therefore$ అనుషక్త బిందువు $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ అవుతుంది.

TSBIE

5. (–5, 6), (3, 2) బిందువుల నుంచి సమాన దూరంలో ఉంటూ, $3x + y + 4 = 0$ సరళరేఖపై ఉన్న బిందువును కనుక్కోండి.

సాధన: A(–5, 6), B(3, 2), $L \equiv 3x + y + 4 = 0$

A, B లకు సమాన దూరంలో గల బిందువు P(a, b) అనుకొనుము.

AP = BP

$$\sqrt{(a+5)^2 + (b-6)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (b-2)^2}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$a^2 + 25 + 10a + b^2 + 36 - 12b = a^2 + 9 - 6a + b^2 + 4 - 4b$$

$$10a - 12b + 61 + 6a + 4b - 13 = 0$$

$$16a - 8b + 48 = 0$$

$2a - b + 6 = 0$ ($\because$ 8 చే భాగించగా) ....(1)

కాని P బిందువు L = 0 పై ఉంది.

$3a + b + 4 = 0$ ....(2)

(1) + (2) చేయగా

$2a - b + 4 = 0$

$\underline{3a + b + 4 = 0}$

$5a + 10 = 0 \Rightarrow 5a = -10$

$\therefore a = -2$

(1) నుండి $2(-2) - b + 6 = 20 \Rightarrow -4 + 6 = b$

$\therefore b = 2$

$\therefore$ కావలసిన బిందువు $P = (-2, 2)$.

6. ఒక సరళరేఖ P(3, 4) గుండాపోతూ X-అక్షం ధనదిశతో 60^o కోణం చేస్తుంది. P నుంచి 5 యూనిట్ల దూరంలో ఆ రేఖపై ఉన్న బిందువుల నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

సాధన: $P(3, 4), r = 5, \theta = 60^o$

పరామితీయ రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం

$(x, y) = (x_1 \pm r\cos\theta,\ y_1 \pm r\sin\theta)$

P ద్వారా పోవు రేఖపై 5 యూనిట్ల దూరంలో గల బిందువులు

$(x, y) = (3 \pm 5\cos 60^o,\ 4 \pm 5\sin 60^o)$

$$= \left[3 \pm 5\left(\frac{1}{2}\right), 4 \pm 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{6 \pm 5}{2}, \frac{8 \pm 5\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \left(\frac{6+5}{2}, \frac{8+5\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{6-5}{2}, \frac{8-5\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\therefore$ కావలసిన బిందువు $= \left(\frac{11}{2}, \frac{8+5\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{8-5\sqrt{3}}{2}\right)$

7. ఒక సరళరేఖ $Q(\sqrt{3}, 2)$ గుండాపోతూ X-అక్షం ధనదిశతో $\pi/6$ కోణం చేస్తుంది. ఆ సరళరేఖ $\sqrt{3}x - 4y + 8 = 0$ ను P వద్ద ఖండిస్తుంది. అయితే PQ దూరం కనుక్కోండి.

సాధన: $\sqrt{3}x - 4y + 8 = 0$ .....(1)

$Q(\sqrt{3}, 2)$, $\theta = \frac{\pi}{6} = \frac{180}{6} = 30 \Rightarrow m = \tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}}$

వాలు $\frac{1}{\sqrt{3}}$ కలిగి Q ద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణం

TSBIE

$y-2=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\sqrt{3}\right)$

$\sqrt{3}(y-2)=1\left(x-\sqrt{3}\right)$

$\sqrt{3}y-2\sqrt{3}=x-\sqrt{3}$

$x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$ ....(2)

(1), (2) ల ఖండన బిందువు P కొరకు (1) $-\sqrt{3}$(2) చేయగా

$\sqrt{3}x-4y+8=0$

$\sqrt{3}x-3y+3=0$

$-y+5=0\Rightarrow y=5.$

(1) నుండి $\sqrt{3}x-4(5)+8=0\Rightarrow\sqrt{3}x=12\Rightarrow x=\frac{12}{\sqrt{3}}$

$x=\frac{4\times 3}{\sqrt{3}}=\frac{4\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

$\text{P}=\left(4\sqrt{3},\ 5\right)$

$\therefore \text{PQ}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-4\sqrt{3}\right)^2+(2-5)^2}$

$=\sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2+(-3)^2}=\sqrt{9(3)+9}=\sqrt{36}$

$\therefore$ PQ = 6.

TSBIE

అభ్యాసం 3d

గమనిక:

1. $\text{L}_1=0, \text{L}_2=0$ సూచించే సరళరేఖల మధ్యకోణం $\theta=\cos^{-1}\left(\left|\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)}}\right|\right)$

2. $\text{L}_1\perp\text{L}_2$ అయిన $\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$ లేదా $m_1, m_2=-1$

3. $\text{L}\equiv ax+by+c=0$ సరళరేఖకు $\text{P}(x_1,\ y_1)$ బిందువు నుంచి లంబదూరం $(d)=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

4. $ax+by+c_1=0,\ ax+by+c_2=0$ సమాంతర రేఖల మధ్యదూరం $=\left|\frac{c_1-c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

ప్రశ్నలు

1. $4x - y + 7 = 0, kx - 5y - 9 = 0$ సరళరేఖల మధ్యకోణం 45^o అయితే k విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: $L_1 \equiv 4x - y + 7 = 0,\ L_2 \equiv kx - 5y - 9 = 0,\ \theta = 45^o$

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{\left(a_1^2 + b_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2\right)}}$$

$$\cos 45^o = \left|\frac{4k + (-)(-5)}{\sqrt{\left(4^2 + (-1)^2\right)\left(k^2 + (-5)^2\right)}}\right|$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4k + 5}{\sqrt{(16+1)\left(k^2 + 25\right)}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{16k^2 + 25 + 40k}{17(k^2 + 25)}$$

$$17k^2 + 425 = 32k^2 + 50 + 80k$$

$$15k^2 + 80k - 375 = 0$$

$$3k^2 + 16k - 75 = 0$$

$$3k^2 + 25k - 9k - 75 = 0$$

$$k(3k + 25) - 3(3k + 25) = 0$$

$$(3k + 25)(k - 3) = 0$$

$3k + 25 = 0$ లేదా $k - 3 = 0$

$3k = -25$ లేదా $k = 3$

$\therefore\ k = 3$ లేదా $\dfrac{-25}{3}$

2. $y - 3kx + 4 = 0, (2k - 1)x - (8k - 1)y - 6 = 0$ సరళరేఖలు లంబంగా ఉంటే k విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: $L_1 \equiv y - 3kx + 4 = 0 \Rightarrow L_1 \equiv 3kx - y - 4 = 0$ .... (1)

$L_2 \equiv (2k - 1)x - (8k - 1)y - 6 = 0$ .... (2)

$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

$$3k(2k - 1) + (-1)[-(8k - 1)] = 0$$

$$6k^2 - 3k + 8k - 1 = 0$$

$$6k^2 + 5k - 1 = 0$$

$$6k^2 + 6k - k - 1 = 0$$

TSBIE

$6k(k+1)-1(k+1)=0$

$(k+1)(6k-1)=0$

$k+1=0$ లేదా $6k-1=0$

$k=-1$ లేదా $k=\frac{1}{6}$

3. **$5x-2y+4=0$ సరళరేఖ మీదికి $(-2, -3)$ బిందువు నుంచి లంబదూరాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన: $L \equiv 5x-2y+4=0,\quad P(-2,-3)$

$$(d)=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

$$\text{లంబదూరం } (d)=\left|\frac{5(-2)-2(-3)+4}{\sqrt{(5)^2+(-2)^2}}\right| = \frac{-10+6+4}{\sqrt{25+4}}$$

$\therefore\ d=0.$

4. **$3x+4y-3=0,\quad 6x+8y-1=0$ సమాంతర రేఖల మధ్యదూరం కనుక్కోండి.**

సాధన: $3x+4y-3=0$ ..... (1) $\quad 6x+8y-1=0$ ..... (2)

$2\times(1) \Rightarrow 6x+8y-6=0$ ..... (3)

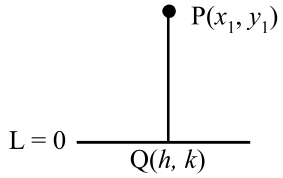
$$\text{(2), (3) సమాంతర రేఖల మధ్యదూరం} = \left|\frac{-6-(-1)}{\sqrt{(6)^2+(8)^2}}\right|$$

$$=\frac{-6+1}{\sqrt{36+64}}=\left|\frac{-5}{\sqrt{100}}\right|=\left|\frac{-5}{10}\right|=\left|\frac{-1}{2}\right|$$

$\therefore\ d=\frac{1}{2}$

5. **$ax+by+c=0$ రేఖకు $P(x_1, y_1)$ నుంచి లంబపాదం $Q(h, k)$ అయితే**
$(h-x_1) : a = (k-y_1) : b = -(ax_1+by_1+c) : (a^2+b^2)$

సాధన: $L \equiv ax+by+c=0,\quad m=\frac{-a}{b}$



PQ వాలు $=\frac{k-y_1}{h-x_1}$

$L \perp PQ \Leftrightarrow m_1m_2=-1$

$$\left(\frac{-a}{b}\right)\left(\frac{k-y_1}{h-x_1}\right)=-1$$

TSBIE

$$\frac{k-y_1}{h-x_1}=\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{k-y_1}{b}=\frac{h-x_1}{a}$$

$\frac{h-x_1}{a}=\frac{k-y_1}{b}=\lambda$ అనుకొనుము.

$\frac{h-x_1}{a}=\lambda$ $\qquad$ $\frac{k-y_1}{b}=\lambda$

$h-x_1=a\lambda$ $\qquad$ $k-y_1=b\lambda$

$h=x_1+a\lambda$ $\qquad$ $k=y_1+b\lambda$

కాని Q బిందువు L = 0 పై ఉంది.

$$a(x_1+a\lambda)+b(y_1+b\lambda)+c=0$$

$$ax_1+a^2\lambda+by_1+b^2\lambda+c=0$$

$$(a^2+b^2)\lambda=-ax_1-by_1+c$$

$$\therefore \frac{h-x_1}{a}=\frac{k-y_1}{b}=\frac{-(ax_1+by_1-c)}{a^2+b^2}$$

6. (–1, 3) నుంచి $5x-y-18=0$ సరళరేఖ మీదికి లంబపాదం కనుక్కోండి.

సాధన: (–1, 3) నుంచి $5x-y-18=0$ సరళరేఖ మీదికి లంబపాదం $Q(h, k)$ అనుకొనుము.

$$\frac{h-x_1}{a}=\frac{k-y_1}{b}=\frac{-(ax_1+by_1-c)}{a^2+b^2}$$

$$\frac{h-(-1)}{5}=\frac{k-3}{1}=\frac{-(-5-3-18)}{(5)^2+(1)^2}$$

$$\frac{h+1}{5}=\frac{k-3}{-1}=\frac{26}{25+1}$$

$$\frac{h+1}{5}=\frac{k-3}{-1}=\frac{26}{26}=1$$

$\frac{h+1}{5}=1$ $\qquad$ $\frac{k-3}{-1}=1$

$h+1=5$ $\qquad$ $k-3=-1$

$h=5-1$ $\qquad$ $k=-1+3$

$h=4$ $\qquad$ $k=2$

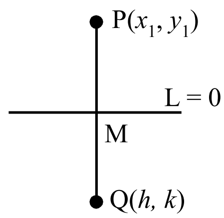
$\therefore (h, k)=(4, 2)$

7. సరళరేఖ $ax+by+c=0$ దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ ప్రతిబింబం $Q(h, k)$ అయితే

$(h-x_1):a=(k-y_1):b=-2(ax_1+by_1+c):(a^2+b^2)$

సాధన: $L \equiv ax+by+c=0$ దృష్ట్యా బిందువు $P(x_1, y_1)$ ప్రతిబింబం $Q(h, k)$ అనుకొనుము.

TSBIE



L = 0 వాలు $(m_1) = \dfrac{-a}{b}$

PQ వాలు $(m_2) = \dfrac{k - y_1}{h - x_1}$

$PQ \perp L \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$

$$\left(\frac{-a}{b}\right)\left(\frac{k-y_1}{h-x_1}\right) = -1$$

$$\frac{k-y_1}{h-x_1} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{k-y_1}{b} = \frac{h-x_1}{a}$$

$\dfrac{h-x_1}{a} = \dfrac{k-y_1}{b} = \lambda$ అనుకొనుము. ....(1)

$\dfrac{h-x_1}{a} = \lambda$ $\qquad$ $\dfrac{k-y_1}{b} = \lambda$

$h - x_1 = a\lambda$ $\qquad$ $k - y_1 = b\lambda$

$h = x_1 + a\lambda$ $\qquad$ $k = y_1 + b\lambda$ ....(2)

P, Q ల మధ్యబిందువు M కనుక

$$M = \left(\frac{x_1+h}{2}, \frac{y_1+k}{2}\right)$$

ఇది L పై ఉంది.

$$a\left(\frac{x_1+h}{2}\right) + b\left(\frac{y_1+k}{2}\right) + c = 0$$

$$\frac{ax_1 + ah + by_1 + bk + 2c}{2} = 0$$

$$ax_1 + a(x_1 + a\lambda) + by_1 + b(y_1 + b\lambda) + 2c = 0$$

$$ax_1 + ax_1 + a^2\lambda + by_1 + by_1 + b^2\lambda + 2c = 0$$

$$\lambda(a^2 + b^2) = -2ax_1 - 2by_1 - 2c$$

$$\therefore \ \lambda = \frac{-2(ax_1 + by_1 - c)}{a^2 + b^2}$$

(1) నుండి

$$\frac{h-x_1}{a} = \frac{k-y_1}{b} = \frac{-2(ax_1 + by_1 - c)}{a^2 + b^2}$$

TSBIE

8. $2x - 3y + 5 = 0$ దృష్ట్యా (1, –2) ప్రతిబింబాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $2x - 3y + 5 = 0$ దృష్ట్యా బిందువు $(1, -2)$ ప్రతిబింబం (h, k) అనుకొనుము.

$$\frac{h-1}{2}=\frac{k+2}{-3}=\frac{-2(2(1)-3(-2)+5)}{(2)^2+(-3)^2}$$

$$\frac{h-1}{2}=\frac{k+2}{-3}=\frac{-2(2+6+5)}{4+9}=\frac{-2(13)}{13}=-2$$

$$\frac{h-1}{2}=-2 \qquad \frac{k+2}{-3}=-2$$

$$h-1=-4 \qquad k+2=6$$

$$h=-3 \qquad k=4$$

$\therefore\ (h, k) = (-3, 4)$

9. (–3, 2) బిందువు గుండా పోతూ $3x - y + 4 = 0$ రేఖతో 45^o కోణాన్ని చేసే రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

సాధన: $P(-3, 2)$, $L \equiv 3x - y + 4 = 0, \theta = 45^o$

P ద్వారా పోవు రేఖ వాలు m అనుకొనుము.

$y - 2 = m(x + 3)$ .....(*)

$y - 2 = mx + 3m$

$mx - y + (2 + 3m) = 0$ .....(1)

దత్తాంశం ప్రకారం $L = 0$, (1) ల మధ్య కోణం 45^o

$$\cos 45^o=\frac{3(m)+(-1)(-1)}{\sqrt{\left((3)^2+(-1)^2(m^2+(-1)^2\right)}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3m+1}{\sqrt{(9+1)(m^2+1)}}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$\frac{1}{2}=\frac{9m^2+1+6m}{10(m^2+1)}$$

$$10(m^2+1)=2(9m^2+1+6m)$$

$$10m^2+10=18m^2+2+12m$$

$$8m^2+10m-8=0$$

$$2m^2+3m-2=0$$

$$2m^2+4m-1m-2=0$$

$$2m(m+2)-1(m+2)=0$$

$$(m+2)((2m-1)=0$$

$m + 2 = 0$ లేదా $2m - 1 = 0$

$m = -2$ లేదా $m = \frac{1}{2}$

TSBIE

Case (i):

$m = -2$ అయితే (*) నుండి

$y-2=-2(x+3)$

$y-2=-2x-6$

$2x+y+4=0$

Case (ii):

$m = \frac{1}{2}$ అయితే (*) నుండి

$y-2=\frac{1}{2}(x+3)$

$2y-4=x+3$

$x-2y+7=0$

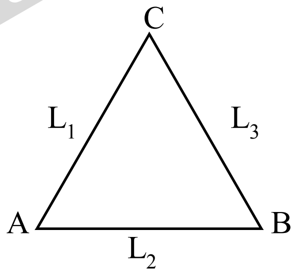
$\therefore$ కావలసిన సరళ రేఖా సమీకరణాలు $2x + 4y + 4 = 0$, $x - 2y + 7 = 0$

10. $x+y-4=0$, $2x+y-6=0$, $5x+3y-15=0$ రేఖలు భుజాలుగా గల త్రిభుజం కోణాలు కనుక్కోండి.

సాధన: $L_1 \equiv x+y-4=0$

$L_2 \equiv 2x+y-6=0$

$L_3 \equiv 5x+3y-15=0$



$$\cos A = \frac{1(2)+1(1)}{\sqrt{(1^2+1^2)(2^2+1^2)}} = \frac{2+1}{\sqrt{(1+1)(4+1)}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\cos B = \frac{2(5)+1(3)}{\sqrt{(2^2+1^2)(5^2+3^2)}} = \frac{10+3}{\sqrt{(4+1)(25+9)}} = \frac{13}{\sqrt{170}}$$

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{13}{\sqrt{170}}\right)$$

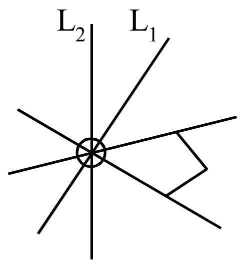
$$\cos C = \frac{5(1)+3(1)}{\sqrt{(5^2+3^2)(1^2+1^2)}} = \frac{5+3}{\sqrt{(25+9)(1+1)}} = \frac{8}{\sqrt{68}} = \frac{8}{2\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$C = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$$

11. $3x + 2y + 4 = 0$, $2x + y = 1$ సరళరేఖల ఖండనబిందువు గుండా పోతూ (2, −1) నుంచి 2 యూనిట్ల దూరంలో గల సరళరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: $L_1 \equiv 3x + 2y + 4 = 0$, $L_2 \equiv 2x + y = 1$, A = (2, `1), $d = 2$

TSBIE



L_1, L_2 ల ఖండన బిందువు కొరకు $2L_1 - 3L_2$

$$6x + 4y + 8 = 0$$
$$\underline{6x + 15y - 3 = 0}$$
$$-11y + 11 = 0 \Rightarrow 11y = 11 \Rightarrow y = 1$$

L_1 నుండి $3x + 2(1) + 4 = 0 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$

P(2, –1)

P గుండా పోవు సరళరేఖ వాలు m అనుకొనుము.

$$y - 1 = m(x + 2) \qquad ....(*)$$
$$y - 1 = mx + 2m$$
$$mx - y + (1+2m) = 0 \qquad ....(1)$$

A నుండి (1) కి లంబదూరం = 2

$$\left|\frac{m(2) - (-1) + 1 + 2m}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}\right| = 2$$

$$\frac{2m + 1 + 1 + 2m}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \Rightarrow \frac{4m + 2}{\sqrt{1 + m^2}} = 2$$

$$2(2m + 1) = 2\sqrt{1 + m^2} \Rightarrow 2m + 1 = \sqrt{1 + m^2}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$4m^2 + 1 + 4m = 1 + m^2$$
$$3m^2 + 4m = 0$$
$$m(3m + 4) = 0$$

$m = 0$ లేదా $m = \frac{-4}{3}$

Case (i): $m = 0$ అయితే (*) నుండి

$$y - 1 = 0(x + 3)$$
$$y = 1$$

Case (ii): $m = \frac{-4}{3}$ అయితే (*) నుండి

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 2)$$
$$3y - 3 = -4x - 8$$
$$4x + 3y + 5 = 0$$

$\therefore$ కావలసిన సరళ రేఖా సమీకరణాలు $y = 1,\ 4x + 3y + 5 = 0$.

TSBIE

12. $3x + 4y + 6 = 0$ రేఖకు లంబంగా వుంటూ X-అక్షం మీద అంతరఖండం చేసే సరళరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: $L_1 \equiv 3x + 4y + 6 = 0$, X-అంతరఖండం $= -4$

$L = 0$ కి లంబంగా ఉండు ఏదైనా సరళరేఖ

$$4x - 3y + k = 0 \qquad .....(*)$$

$$4x - 3y = -k = 0$$

$$\frac{4x}{(-k)} - \frac{3y}{(-k)} = \frac{-k}{(-k)}$$

$$\frac{x}{\left(\frac{-k}{4}\right)} - \frac{y}{\left(\frac{-k}{3}\right)} = 1 \qquad .....(1)$$

(1) యొక్క X-అంతరఖండం $= \frac{-k}{4}$

దత్తాంశం ప్రకారం $\frac{-k}{4} = -4 \Rightarrow k = 16$

$\therefore$ కావలసి సరళరేఖ సమీకరణం $4x - 3y + 16 = 0$

TSBIE

అభ్యాసం 3e

గమనిక:

1. ఒక త్రిభుజం మధ్యగత రేఖలు అనుషక్తాలు.
2. ఒక త్రిభుజం ఉన్నతులు అనుషక్తాలు. ఉన్నతుల అనుషక్త బిందువు లంబకేంద్రం.
3. ఒక త్రిభుజం కోణాల అంతర సమద్విఖండన రేఖలు అనుషక్తాలు. ఈ రేఖల అనుషక్త బిందువు అంతరకేంద్రం.
4. ఒక త్రిభుజం భుజాల లంబసమద్విఖండన రేఖలు అనుషక్తాలు. ఈ రేఖల అనుషక్త బిందువును పరికేంద్రం అంటారు.

ప్రశ్నలు

1. మూలబిందువు గుండాను, $2x - y + 5 = 0$, $x + y + 1 = 0$ సరళరేఖల ఖండన బిందువు గుండాను పోయే సరళరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: $O(0, 0)$, $L_1 \equiv 2x - y + 5 = 0$, $L_2 \equiv x + y + 1 = 0$

$L_1 + L_2$ చేయగా

$$\begin{array}{r} 2x - y + 5 = 0 \\ \underline{x + y + 1 = 0} \\ 3x + 6 = 0 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2 \end{array}$$

L_1 నుండి $2(-2) - y + 5 = 0 \Rightarrow 1 - y = 0 \Rightarrow y = 1$

L_1, L_2ల ఖండన బిందువు $A(-2, 1)$

∴ కావలసిన సరళరేఖ O, A ద్వారా పోతుంది.

$$y-0=\left(\frac{1-0}{-2-0}\right)(x-0)$$

$$-2(y)=1(x)$$

$$x+2y=0$$

2. $3x+4y=7$ రేఖకు సమాంతరంగా ఉంటూ $x-2y-3=0, x+3y-6=0$ సరళరేఖల ఖండన బిందువు గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: $L_1 \equiv 3x+4y=7,\ L_2 \equiv x-2y-3=0,\ L_2 \equiv x+3y-6=0$

L_2, L_3 ల ఖండన బిందువు కొరకు $L_2 - L_3$ చేయగా

$$\begin{array}{l} x-2y-3=0 \\ \underline{x+3y-6=0} \\ -\quad -\quad + \\ -5y+3=0 \\ \Rightarrow 5y=3 \Rightarrow y=\frac{3}{5} \end{array}$$

L_2 నుండి $x-2(\frac{3}{5})-3=0$

$$x=\frac{6}{5}+3=\frac{6+15}{5}=\frac{21}{5}$$

ఖండన బిందువు $A=\left(\frac{21}{5},\frac{3}{5}\right)$

$L_1 \equiv 3x+4y=7$ కి సమాంతరంగా ఉండే ఏదైనా సరళరేఖ $3x+4y+k=0$ రూపంలో ఉంటుంది.
కాని ఇది A గుండా పోతుంది.

$$3\left(\frac{21}{5}\right)+4\left(\frac{3}{5}\right)+k=0$$

$$k+\frac{63+12}{5}=0 \Rightarrow k=\frac{-75}{5}=-15$$

∴ కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం $3x+4y-15=0$

3. నిరూపక అక్షాలతో శూన్యేతర సమాన అంతరఖండాలు చేస్తూ $2x-5y+1=0, x-3y-4=0$ సరళరేఖల ఖండన బిందువు గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: $L_1 \equiv 2x-5y+1=0,\ L_2 \equiv x-3y-4=0$

L_1, L_2 ల ఖండన బిందువు కొరకు $L_1 - 2L_2$ చేయగా

$$\begin{array}{l} 2x-5y+1=0 \\ \underline{2x-6y-8=0} \\ -\quad +\quad + \\ y+9=0 \Rightarrow y=-9 \end{array}$$

TSBIE

L_1 నుండి $2x - 5(-9) + 1 = 0$

$2x - 45 + 1 = 0$

$2x = -46$

$x = -23$

$A = (-23, -9)$

శూన్యేతర సమాన అంతరఖండాలు అనగా $a = b$

అంతరఖండ రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \quad (\because a = b)$$

కాని ఇది A గుండా పోతుంది.

$-23 - 9 = a$

$-32 = a$

$\therefore$ కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణ $x + y = -32 \Rightarrow x + y + 32 = 0.$

4. $3x + 2y + 4 = 0$, $2x + 5y - 1 = 0$ రేఖల ఖండన బిందువు నుండి $7x + 24y - 15 = 0$ సరళరేఖకు గల లంబదూరం కనుక్కోండి.

సాధన: $L_1 \equiv 3x + 2y + 4 = 0$, $L_2 \equiv 2x + 5y - 1 = 0$, $L_2 \equiv 7x + 24y - 15 = 0$

L_1, L_2 ల ఖండన బిందువు A కొరకు

$$\frac{x}{2(-) - 5(4)} = \frac{y}{4(2) - (-1)(3)} = \frac{1}{3(5) - 2(2)}$$

$$\frac{x}{-2 - 20} = \frac{y}{8 + 3} = \frac{1}{15 - 4}$$

$$\frac{x}{-22} = \frac{y}{11} = \frac{1}{11}$$

$A = (-2, 1)$

A నుండి $L_3 = 0$ కి లంబదూరం

$$d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{7(-2) + 24(1) - 15}{\sqrt{(7)^2 + (24)^2}} \right| = \left| \frac{-14 + 24 - 15}{\sqrt{49 + 576}} \right|$$

$$= \left| \frac{-5}{\sqrt{625}} \right| = \frac{5}{25}$$

$$\therefore d = \frac{1}{5}$$

TSBIE

5. ఒక సమబాహు త్రిభుజం భూమి $x + y - 2 = 0$, ఎదుటి శీర్షం (2, −1) అయితే మిగిలిన భుజాల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

సాధన: $L \equiv x + y - 2 = 0$, A(2, –1)

A ద్వారా పోవు రేఖ వాలు m అనుకొనుము.

A ద్వారా పోతూ L = 0 ని B వద్ద ఖండించు రేఖ సమీకరణం

$y + 1 = m(x - 2)$ ....(*)

$y + 1 = mx - 2m$

$mx - y - (1 + 2m) = 0$ ....(1)

L = 0, (1) మధ్యకోణం 60^o (∵ ABC సమబాహు త్రిభుజం)

$$\cos 60^o = \frac{1(m) + 1(-1)}{\sqrt{((1)^2 + (1)^2)(m^2 + (-1)^2)}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{m-1}{\sqrt{(1+1)(1+m^2)}}$$

$$\frac{x}{-2-20} = \frac{y}{8+3} = \frac{1}{15-4}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$\frac{1}{4} = \frac{m^2 + 1 - 2m}{2(1+m^2)}$$

$$(1+m^2) = 2m^2 + 2 - 4m$$

$$2m^2 + 2 - 4m - 1 - m^2 = 0$$

$$m^2 - 4m + 1 = 0$$

$$m = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2 \pm \sqrt{3})}{2}$$

$$m = 2 \pm \sqrt{3}$$

∴ కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం (*) నుండి $y + 1 = (2 \pm \sqrt{3})(x - 2)$.

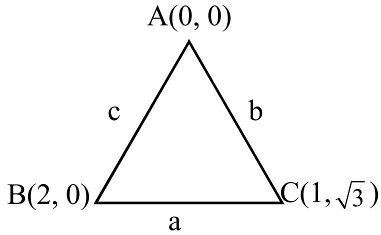
6. $(1, \sqrt{3})$, (2, 0), (0, 0) శీర్షాలు గల త్రిభుజం అంతరకేంద్రం కనుక్కోండి.

సాధన: A(0, 0), B(2, 0), $C(1, \sqrt{3})$

$c = AB = \sqrt{(2-0)^2+(0-0)^2} = \sqrt{4} = 2$

$b = AC = \sqrt{(1-0)^2+(\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$a = BC = \sqrt{(1-2)^2+(\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{1+3} = 2$



త్రిభుజ అంతరకేంద్రం $I = \left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$

$$I = \left(\frac{2(0)+2(2)+2(1)}{2+2+2}, \frac{2(0)+2(0)+2(\sqrt{3})}{2+2+2}\right)$$

$$= \left(\frac{0+4+2}{6}, \frac{0+0+2\sqrt{3}}{6}\right)$$

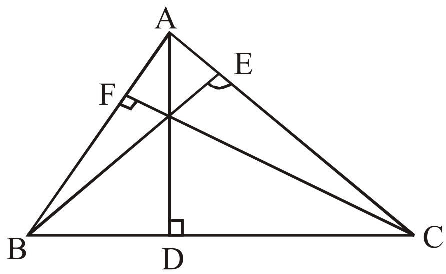
$$= \left(\frac{6}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{6}\right) = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\therefore\ I = \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

7. (–5, –7), (13, 2), (–5, 6) శీర్షాలు గల త్రిభుజం లంబకేంద్రం కనుక్కోండి.

సాధన: A(–5, –7), B(13, 2), C(–5, 6)

BC వాలు $= \frac{6-2}{-15-13} = \frac{4}{-18} = \frac{-2}{9}$



A నుంచి BC కి గీసిన ఉన్నతిని (లంబరేఖను) AD అని,
B నుంచి AC కి గీసిన ఉన్నతిని BE అనీ అనుకొనుము.

$AD \perp BC$

AD వాలు $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\left(\frac{-2}{9}\right)} = \frac{9}{2}$

A ద్వారా పోతూ వాలు $\frac{9}{2}$ గా గల AD సమీకరణం

$y+7 = \frac{9}{2}(x+5)$

$2y+14 = 9x+45$

$9x-2y+31 = 0 \qquad \ldots..(1)$

AC వాలు $\frac{6+7}{-5-(-5)} = \frac{13}{0} = \infty$

$BE \perp AC \Rightarrow$ BE వాలు $= 0$

$\therefore$ BE సమీకరణం $y - 2 = 0(x - 13)$

$y - 2 = 0$

$y = 2$ ....(2)

(1), (2) ఖండన బిందువు కావలసిన ΔABC లంబకేంద్రం అవుతుంది.

(1), (2) ల నుండి $9x - 2(2) + 31 = 0$

$9x + 27 = 0 \Rightarrow 9x = -27 \Rightarrow 9x = -3.$

$\therefore O = (-3, 2)$

8. **$7x + y - 10 = 0, x - 2y + 5 = 0, x + y + 2 = 0$ ఒక త్రిభుజం సమీకరణాలు అయితే ఆ త్రిభుజం లంబకేంద్రం కనుక్కోండి.**

సాధన: $L_1 \equiv 7x + y - 10 = 0,\ L_2 \equiv x - 2y + 5 = 0,\ L_2 \equiv x + y + 2 = 0$

A బిందువు కొరకు $2L_1 + L_2$

$14x + 2y - 20 = 0$

$x - 2y + 5 = 0$

$15x - 15 = 0 \Rightarrow x = 1.$

L_1 నుండి $7(1) + y - 10 = 0 \Rightarrow y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A = (1, 3)$

B బిందువు కొరకు $L_1 - L_3$

$7x + y - 10 = 0$

$x + y + 2 = 0$

$- \quad - \quad -$

$6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2.$

L_1 నుండి $7(2) + y - 10 = 0 \Rightarrow y + 4 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow B = (2, -4)$

C బిందువు కొరకు $L_2 - L_3$

$x - 2y + 5 = 0$

$x + y + 2 = 0$

$- \quad - \quad -$

$-3y + 3 = 0 \Rightarrow y = 1.$

L_2 నుండి $x - 2(1) + 5 = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$\Rightarrow C = (-3, 1)$

BC వాలు $= \dfrac{-1}{(1)} = -1$

$AD \perp BC \Rightarrow$ AD వాలు $= \dfrac{-1}{(-1)} = 1$

AD సమీకరణం $y - 3 = 1(x - 1)$

$y - 3 = (x - 1)$

$x - y + 2 = 0$ ....(1)

TSBIE

AC వాలు $= \frac{-1}{(-2)} = \frac{1}{2}$

$BE \perp AC \Rightarrow$ BE వాలు $= \frac{-1}{(1/2)} = -2$

BE సమీకరణం $y + 4 = -2(x-2)$

$y + 4 = -2x - 4$

$2x + y = 0$ ....(2)

(1), (2) ల ఖండన బిందువు ΔABC లంబకేంద్రం అవుతుంది.

(1) + (2) చేయగా

$$x - y + 2 = 0$$
$$2x + y \quad = 0$$
$$3x \quad + 2 = 0 \Rightarrow x = -2/3$$

(1) నుండి $\frac{-2}{3} - y + 2 = 0 \Rightarrow \frac{-2+6}{3} = y \Rightarrow y = \frac{4}{3}$

$\therefore$ కావలసిన లంబకేంద్రం $O = \left(\frac{-2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

9. (–2, 3), (2, –1), (4, 0) లు శీర్షాలు గల త్రిభుజం పరికేంద్రం కనుక్కోండి.

సాధన: A(–2, 3), B(2, –1), C(4, 0)

త్రిభుజ పరికేంద్రం $S = (a, b)$ అనుకొనుము.

కాని SA = SB = SC అని తెలుసు.

SA = SB

$$\sqrt{(-2-a)^2 + (3-b)^2} = \sqrt{(2-a)^2 + (-1-b)^2}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$4 + a^2 + 4a + 9 + b^2 - 6b = 4 + a^2 - 4a + 1 + b^2 + 2b$$

$$4a - 6b + 13 + 4a - 2b - 5 = 0$$

$$8a - 8b + 8 = 0$$

8 చే భాగించగా $a - b + 1 = 0$ ....(1)

SA = SB

$$\sqrt{(-2-a)^2 + (3-b)^2} = \sqrt{(4-a)^2 + (0-b)^2}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$4 + a^2 + 4a + 9 + b^2 - 6b = 16 + a^2 - 8a + b^2$$

$$4a - 6b + 13 + 8a - 16 = 0$$

$$12a - 6b - 3 = 0$$

$4a - 2b - 1 = 0$ ....(2)

TSBIE

(1), (2) ల ఖండన బిందువు కావలసిన పరికేంద్రం అవుతుంది.

4(1) - (2) చేయగా $4a - 4b + 4 = 0$

$4a - 2b - 1 = 0$

$-\quad +\quad +$

$-2b + 5 = 0 \Rightarrow b = 5/2$

(1) నుండి $a - \frac{5}{2} + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{2} - 1 \Rightarrow a = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ పరికేంద్రం $S = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

10. $x\sec\alpha + y\operatorname{cosec}\alpha = a,\ x\cos\alpha - y\sin\alpha = a\cos 2\alpha$ **సరళరేఖలకు మూలబిందువు నుంచి లంబదూరాలు** p, q **అయితే** $4p^2 + q^2 = a^2$ **అని చూపండి.**

సాధన: $L_1 \equiv x\sec\alpha + y\operatorname{cosec}\alpha = a,\ L_2 \equiv x\cos\alpha - y\sin\alpha - a\cos 2\alpha = 0$

p(0, 0) నుండి L_1 కి లంబదూరం

$$= \left|\frac{(0)\sec\alpha + (0)\operatorname{cosec}\alpha - a}{\sqrt{(\sec\alpha)^2 + (\operatorname{cosec}\alpha)^2}}\right| = \left|\frac{-a}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha}}}\right|$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha.\sin^2\alpha}}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{1}{(\sin\alpha\cos\alpha)^2}}} = \frac{a}{\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)}$$

$p = a \sin\alpha \cos\alpha$

మరియు $q = (0, 0)$ నుండి L_2 కి లంబదూరం

$$= \left|\frac{(0)\cos\alpha - (0)\sin\alpha - a\cos 2\alpha}{\sqrt{(\cos\alpha)^2 + (-\sin\alpha)^2}}\right| = \left|\frac{0 - 0 - a\cos 2\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha \sin^2\alpha}}\right|$$

$$= \left|\frac{-a\cos 2\alpha}{\sqrt{1}}\right|$$

$\therefore q = a\cos 2\alpha$

ఇప్పుడు $4p^2 + q^2 = 4(a\sin\alpha\cos\alpha)^2 + (a\cos 2\alpha)^2$

$= a^2(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 + a^2\cos^2 2\alpha$

$= a^2[\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha]$

$= a^2(1) \qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$\therefore 4p^2 + q^2 = a^2$

TSBIE

యూనిట్ **4**

సరళరేఖా యుగ్మాలు

→ $a = h = b = 0$ కానపుడు $H \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ని x, y లలో రెండో తరగతి సాధారణ సమఘాత సమీకరణమని

$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ని x, y లలో రెండో తరగతి సాధారణ సమీకరణం అని అంటారు.

→ $a = h = b = 0$ కానపుడు $H \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ అనే సమీకరణం ఒక సరళరేఖా యుగ్మాన్ని సూచిస్తుంది $\Leftrightarrow h^2 \geq ab$.

→ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ అనే సమీకరణం ఒక సరళరేఖా యుగ్మాన్ని సూచిస్తూ, ఆ రేఖల మధ్యకోణం θ అయిన

$$\cos\theta = \frac{|a+b|}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

(i) $h^2 = ab$ అయితే యుగ్మంలోని రేఖలు ఏకీభవిస్తాయి.

(ii) $a + b = 0$ అయితే యుగ్మంలోని రేఖలు లంబరేఖలగును.

→ $S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనే రెండో తరగతి సమీకరణం ఒక రేఖాయుగ్మాన్ని సూచిస్తుంది.

⇔ (i) $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

(ii) $h^2 \geq ab, g^2 \geq ac, f^2 \geq bc$

దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (10 మార్కులు)

1. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ అనే సరళరేఖాయుగ్మంలోని రేఖల మధ్యకోణం θ అయితే

$$\cos\theta = \frac{|a+b|}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$ **అని చూపండి.**

సాధన: $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ అనే యుగ్మం సూచించు రేఖలు

$l_1x + m_1y = 0$ ....(1)

$l_2x + m_2y = 0$ ....(2) అనుకొనుము.

TSBIE

$\therefore \quad ax^2 + 2hxy + by^2 = (l_1x + m_1y)(l_2x + m_2y)$

$\Rightarrow \quad ax^2 + 2hxy + by^2 = l_1l_2x^2 + (l_1m_2 + l_2m_1)xy + m_1m_2y^2$

ఇరువైపులా సజాతి గుణకాలను పోల్చగా

$l_1l_2 = a,\ l_1m_2 + l_2m_1 = 2h,\ m_1m_2 = b$

(1) మరియు (2) రేఖల మధ్యకోణం θ అయిన

$$\cos\theta = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$$

$$= \frac{|l_1l_2 + m_1m_2|}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2)(l_2^2 + m_2^2)}}$$

$$= \frac{|l_1l_2 + m_1m_2|}{\sqrt{l_1^2l_2^2 + l_1^2m_2^2 + l_2^2m_1^2 + m_1^2m_2^2}}$$

$$= \frac{|l_1l_2 + m_1m_2|}{\sqrt{(l_1l_2 - m_1m_2)^2 + 2l_1l_2m_1m_2 + (l_1m_2 + l_2m_1)^2 - 2l_1m_2m_2l_1}}$$

$$= \frac{|a+b|}{\sqrt{(a-b)^2 + (2h)^2}} \qquad [\because l_1l_2 = a,\ m_1m_2 = b,\ l_1m_2 + l_2m_1 = 2h]$$

$$= \frac{|a+b|}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

2. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ అనే రేఖాయుగ్మం నుంచి (α, β) అనే బిందువుకు లంబ దూరాల లబ్ధం $\dfrac{|a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2|}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 4h^2}}$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ అనే యుగ్మం సూచించు రేఖలు

$l_1x + m_1y = 0 \quad \ldots(1)$

$l_2x + m_2y = 0 \quad \ldots(2)$ అనుకొనుము.

$\therefore \quad ax^2 + 2hxy + by^2 = (l_1x + m_1y)(l_2x + m_2y)$

$= l_1l_2x^2 + (l_1m_2 + l_2m_1)xy + m_1m_2y^2$

ఇరువైపులా సజాతి గుణకాలను పోల్చగా

$l_1l_2 = a,\ l_1m_2 + l_2m_1 = 2h,\ m_1m_2 = b$

(α, β) నుండి $l_1x + m_1y = 0$ కు లంబదూరం $d_1 = \dfrac{|l_1\alpha + m_1\beta|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}}$

TSBIE

అలాగే

(α, β) నుండి $l_2x + m_2y = 0$ కు లంబదూరం $d_2 = \dfrac{|l_2\alpha + m_2\beta|}{\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$

$\therefore$ లంబదూరాల లబ్ధం $= d_1 \times d_2$

$$= \frac{|l_1\alpha + m_1\beta|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}} \times \frac{|l_2\alpha + m_2\beta|}{\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$$

$$= \frac{|(l_1\alpha + m_1\beta)(l_2\alpha + m_2\beta)|}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2)(l_2^2 + m_2^2)}}$$

$$= \frac{|l_1l_2\alpha^2 + (l_1m_1 + l_2m_1)\alpha\beta + m_1m_2\beta^2|}{\sqrt{l_1^2l_2^2 + l_1^2m_2^2 + l_2^2m_1^2 + m_1^2m_2^2}}$$

$$= \frac{|l_1l_2\alpha^2 + (l_1m_1 + l_2m_1)\alpha\beta + m_1m_2\beta^2|}{\sqrt{(l_1l_2 - m_1m_2)^2 + 2l_1l_2m_1m_2 + (l_1m_2 + l_2m_1)^2 - 2l_1l_2m_1m_2}}$$

$$= \frac{|l_1l_2\alpha^2 + (l_1m_1 + l_2m_1)\alpha\beta + m_1m_2\beta^2|}{\sqrt{(l_1l_2 - m_1m_2)^2 + (l_1m_2 + l_2m_1)^2}}$$

$$= \frac{|a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2|}{\sqrt{(a-b)^2 + (2h)^2}} \qquad [\because l_1l_2 = a,\ m_1m_2 = b,\ l_1m_2 + l_2m_1 = 2h]$$

$$= \frac{|a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2|}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

3. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ అనే రేఖాయుగ్మంతోను, $lx + my + n = 0$ అనే సరళరేఖతోను నిర్దిష్టమయ్యే త్రిభుజ వైశాల్యం $\left|\dfrac{n^2\sqrt{h^2 - ab}}{am^2 - 2hlm + bl^2}\right|$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ అనే యుగ్మం సూచించు రేఖలు

$l_1x + m_1y = 0$ ....(1)

$l_2x + m_2y = 0$ ....(2)

ఇచ్చిన మరో సరళరేఖ సమీకరణం $lx + my + n = 0$ ....(3) అనుకొనుము.

$\therefore\ ax^2 + 2hxy + by^2 = (l_1x + m_1y)(l_2x + m_2y)$

$= l_1l_2x^2 + (l_1m_2 + l_2m_1)xy + m_1m_2y^2$

TSBIE

ఇరువైపులా సజాతి గుణకాలను పోల్చగా

$l_1l_2 = a,\ l_1m_2 + l_2m_1 = 2h,\ m_1m_2 = b$

(1) మరియు (3) ల ఖండన బిందువు A అనుకొనిన

$$\frac{x}{m_1n - o} = \frac{y}{o - nl_1} = \frac{1}{l_1m - lm_1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{m_1n}{l_1m - lm_1},\quad y = \frac{-nl_1}{l_1m - lm_1}$$

$$\therefore \text{A} = \left(\frac{m_1n}{l_1m - lm_1}, \frac{-nl_1}{l_1m - lm_1}\right)$$

అలాగే (2) మరియు (3) ల ఖండన బిందువు B అనుకొనిన

$$\frac{x}{m_2n - o} = \frac{y}{o - nl_2} = \frac{1}{l_2m - lm_2}$$

$$\therefore \text{B} = \left(\frac{m_2n}{l_2m - lm_2}, \frac{-nl_2}{l_2m - lm_2}\right)$$

మరియు (1), (2) ల ఖండన బిందువు మూలబిందువు O అవుతుంది.

[(0, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) శీర్షాలు గల త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_2y_1\right|$]

$\therefore\ \Delta$OAB వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\left|\frac{m_1n}{l_1m - lm_1} \times \frac{(-nl_2)}{l_2m - lm_2} - \frac{m_2n}{l_2m - lm_2} \times \frac{(-nl_1)}{l_1m - lm_1}\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{l_1m_2n^2 - m_1l_2n^2}{(l_1m - lm_1)(l_2m - lm_2)}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{n^2(l_1m_2 - m_1l_2)}{l_1l_2m^2 - (l_1m_2 + l_2m_1)lm + m_1m_2l^2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{n^2\sqrt{(l_1m_2 - l_2m_1)^2}}{l_1l_2m^2 - (l_1m_2 + l_2m_1)lm + m_1m_2l^2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{n^2\sqrt{(l_1m_2 + l_2m_1)^2 - 4l_1m_2l_2m_1}}{l_1l_2m^2 - (l_1m_2 + l_2m_1)lm + m_1m_2l^2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{n^2\sqrt{(2h)^2 - 4ab}}{am^2 - 2hlm + bl^2}\right| \qquad \left[\because l_1l_2 = a,\ m_1m_2 = b,\ l_1m_2 + l_2m_1 = 2h\right]$$

TSBIE

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{n^2\sqrt{4h^2-4ab}}{am^2-2hlm+bl^2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{n^2\sqrt{h^2-ab}}{am^2-2hlm+bl^2}\right|$$

4. $(x^2 + 2a)^2 - 3y^2 = 0, x = 0$ రేఖలు సమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.

సాధన: ఇచ్చిన యుగ్మ సమీకరణం $(x^2 + 2a)^2 - (\sqrt{3}\,y)^2 = 0$

$$\Rightarrow \left(x+2a-\sqrt{3}y\right)\left(x+2a+\sqrt{3}y\right)=0$$

$\therefore$ యుగ్మం సూచించు రేఖలు $x+\sqrt{3}y+2a=0$ ....(1)

$x-\sqrt{3}y+2a=0$ ....(2)

ఇచ్చిన మరో సరళరేఖ సమీకరణం $x-a=0$ ....(3) అనుకొనుము.

(1), (3) ల మధ్యకోణం A అయితే

$$\cos A = \frac{\left|1.1+\sqrt{3}.0\right|}{\sqrt{1+3}\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^o$$

(2), (3) ల మధ్యకోణం B అయితే

$$\cos B = \frac{\left|1.1+(-\sqrt{3}).0\right|}{\sqrt{1+3}\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 60^o$$

$\therefore$ (1), (2) ల వాలులు విభిన్నాలు కావున అవి విభిన్న రేఖలు మరియు త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలు 60^0, 60^0 కావున మూడో కోణం 60^0 అగును.

$\therefore$ దత్త సమీకరణాలతో ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుచును.

5. $2y^2 - xy - 6x^2 = 0$ అనే యుగ్మ సమీకరణం మరియు $x + y + 4 = 0$ అనే సరళరేఖలతో ఏర్పడు త్రిభుజ కేంద్రభాసం, వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చిన సరళరేఖ యుగ్మ సమీకరణం $2y^2 - xy - 6x^2 = 0$ .....(1)

$$\Rightarrow 2y^2-4xy+3xy-6x^2=0$$

$$\Rightarrow 2y(y-2x)+3x(y-2x)=0$$

$$\Rightarrow (y-2x)(2y+3x)=0$$

$\therefore$ యుగ్మ సమీకరణం (1) సూచించు రేఖలు $y-2x=0$

$\Rightarrow 2x-y=0$ .....(2)

మరియు $3x+2y=0$ .....(3)

ఇచ్చిన దత్త సరళరేఖ సమీకరణం $x+y+4=0$ .....(4)

TSBIE

(2) మరియు (3) ల ఖండన బిందువు మూలబిందువు O(0, 0) అగును.

(2), (4) ల ఖండన బిందువు A అనుకొనిన మరియు వాటిని సాధించగా

$$\frac{x}{-4-0}=\frac{y}{0-8}=\frac{1}{2+1}$$

$$\therefore A=\left(\frac{-4}{3},\frac{-8}{3}\right)$$

(3), (4) లను సాధించగా వాటి ఖండన బిందువు B అనుకొనిన

$$\frac{x}{8-0}=\frac{y}{0-12}=\frac{1}{3-2}$$

$$\therefore B=(8,-12)$$

ΔABC కేంద్రభాసం $=\left(\dfrac{0-4/3+8}{3},\dfrac{0-8/3-12}{3}\right)=\left(\dfrac{20}{9},\dfrac{-44}{9}\right)$

[$O(0, 0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ లతో ఏర్పడు త్రిభుజ వైశాల్యం $=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$]

$\therefore$ కావల్సిన త్రిభుజ వైశాల్యం $=\dfrac{1}{2}\left|\left(\dfrac{-4}{3}\right)(-12)-8\left(\dfrac{-8}{3}\right)\right|$

$=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{48}{3}+\dfrac{64}{3}\right|=\dfrac{112}{2\times 3}=\dfrac{56}{3}$ చ.యూ.

6. $(lx+my)^2-3(mx-ly)=0$, $lx + my = 0$ అనే అనే సరళరేఖలతో ఏర్పడే త్రిభుజం $\dfrac{n^2}{\sqrt{3}(l^2+m^2)}$ వైశాల్యంగా గల సమబాహు త్రిభుజం అని నిరూపించండి.

సాధన: ఇచ్చిన సరళరేఖ సమీకరణం $lx + my = 0$ .....(1)

(1) యొక్క వాలు $m_1=\dfrac{-l}{m}$

(1) తో 60^0 కోణం చేయు సరళరేఖ $y=m_2x$ అనుకొనిన (ఈ రేఖ వాలు $=m_2$)

$$\therefore \tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

$$\tan 60^o=\left|\frac{-l/m-y/x}{1+\left(-l/m\right)y/x}\right| \qquad \left[\because m_2=y/x\right]$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \left| \frac{\frac{-lx - my}{mx}}{\frac{mx - ly}{mx}} \right| = \left| \frac{-(lx + my)}{mx - ly} \right|$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$3(mx - ly)^2 = (lx + my)^2$$

$$\Rightarrow (lx + my)^2 - 3(mx - ly)^2 = 0 \qquad \ldots.(2)$$

పై సమీకరణం (1) తో 60^0 కోణం చేయు యుగ్మ సమీకరణంను సూచిస్తుంది.

$\therefore (lx + my)^2 - 3(mx - ly)^2 = 0$ మరియు $lx + my + n = 0$ లతో సమబాహు త్రిభుజం ఏర్పడుతుంది.

అలాగే (2) లోని ఖండన బిందువు (0, 0) నుండి (1) కి లంబదూరం $P = \frac{|n|}{\sqrt{l^2 + m^2}}$

$\therefore$ ఆ సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యం $\frac{P^2}{\sqrt{3}} = \frac{n^2}{\sqrt{3}(l^2 + m^2)}$

7. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0, lx + my = 0$ **అనే అనే సరళరేఖలతో ఏర్పడే త్రిభుజం కేంద్రభాసం** (α, β) **అయితే** $\frac{\alpha}{bl - hm} = \frac{\beta}{am - hl} = \frac{2}{3(bl^2 - 2hlm + am^2)}$ **అని నిరూపించండి.**

సాధన: ఇచ్చిన యుగ్మ సమీకరణం $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ సూచించు రేఖలు

$$l_1x + m_1y = 0 \qquad \ldots.(1)$$

$$l_2x + m_2y = 0 \qquad \ldots.(2)$$

అనుకొనుము.

$$\therefore \ ax^2 + 2hxy + by^2 = (l_1x + m_1y)(l_2x + m_2y)$$

$$= l_1l_2x^2 + (l_1m_2 + l_2m_1)xy + m_1m_2y^2$$

ఇరువైపులా సజాతి గుణకాలను పోల్చగా

$l_1l_2 = a,\ l_1m_2 + l_2m_1 = 2h,\ m_1m_2 = b$

ఇచ్చిన దత్త సరళరేఖా సమీకరణం $lx + my = 0 \qquad \ldots.(3)$

(1), (2) ల ఖండన బిందువు మూలబిందువు O(0, 0) అగును.

(1), (3) ల ఖండన బిందువు A అనుకొనిన

$$\frac{x}{-m_1 - 0} = \frac{y}{0 + l_1} = \frac{1}{ml_1 - lm_1}$$

$$\therefore A = \left(\frac{-m_1}{l_1m - lm_1}, \frac{l_1}{l_1m - lm_1} \right)$$

అలాగే (2), (3) ల ఖండన బిందువు B అనుకొనిన

TSBIE

$$\frac{x}{-m_2 - 0} = \frac{y}{0 + l_2} = \frac{1}{ml_2 - lm_2}$$

$$\therefore \mathrm{B} = \left(\frac{-m_2}{l_2m - lm_2}, \frac{l_2}{l_2m - lm_2}\right)$$

ΔOAB కేంద్రభాసం $= (\alpha, \beta)$

$\therefore (\alpha, \beta) = \left(\dfrac{x \text{ నిరూపకాల మొత్తం}}{3}, \dfrac{y \text{ నిరూపకాల మొత్తం}}{3}\right)$

$$\Rightarrow (\alpha, \beta) = \frac{1}{3}\left[\frac{-m_1}{l_1m - lm_1} - \frac{m_2}{l_2m - lm_2}, \frac{l_1}{l_1m - lm_1} + \frac{l_2}{l_2m - lm_2}\right]$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{3}\left[\frac{-m_1}{l_1m - lm_1} - \frac{m_2}{l_2m - lm_2}\right], \beta = \left[\frac{l_1}{l_1m - lm_1} + \frac{l_2}{l_2m - lm_2}\right]$$

ఇప్పుడు

$$\alpha = \frac{1}{3}\left[\frac{-m_1(l_2m - lm_2) - m_2(l_1m - lm_1)}{(l_1m - lm_1)(l_2m - lm_2)}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{-m_1l_2m + lm_1m_2 - l_1mm_2 + lm_1m_2}{l_1l_2m^2 - (l_1m_2 + l_2m_1)lm + m_1m_2l^2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2m_1ml - m(l_1m_2 + l_2m_1)}{l_1l_2m^2 - (l_1m_2 + l_2m_1)lm + m_1m_2l^2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2bl - m(2h)}{am^2 - 2hlm + bl^2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{bl - hm} = \frac{2}{3(bl^2 - 2hlm + am^2)}$$

అలాగే $\dfrac{\beta}{am - hl} = \dfrac{2}{3(bl^2 - 2hlm + am^2)}$ గా నిరూపించవచ్చు.

$$\therefore \frac{\alpha}{bl - hm} = \frac{\beta}{am - hl} = \frac{2}{3(bl^2 - 2hlm + am^2)}$$

8. $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y + 1 = 0$ **సమీకరణం ఒక లంబరేఖా యుగ్మాన్ని సూచిస్తుందని నిరూపించండి.**

సాధన: ఇవ్వబడిన సమీకరణం $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y + 1 = 0$ ను

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ తో పోల్చగా

$$a = 2, h = \frac{3}{2}, b = -2, g = \frac{3}{2}, f = \frac{1}{2}, c = 1$$

ఇపుడు $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$$= 2(-2)(1) + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-2)\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= -4 + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} + \frac{9}{2} - \frac{9}{4}$$

$$= -4 + \frac{8}{2} = 0$$

అలాగే $h^2 - ab = \frac{9}{4} - 2(-2) = \frac{9}{4} + 4 = \frac{9+16}{4} = \frac{25}{4} > 0$

$$g^2 - ac = \frac{9}{4} - 2(1) = \frac{9}{4} - 2 = \frac{9-8}{4} = \frac{1}{4} > 0$$

$$f^2 - bc = \frac{1}{4} - (-2) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1+8}{4} = \frac{9}{4} > 0$$

$\therefore$ ఇవ్వబడిన సమీకరణం $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y + 1 = 0$

ఒక సరళరేఖాయుగ్మ సమీకరణాన్ని సూచిస్తుంది.

అలాగే x^2 గుణకం $+ y^2$ గుణకం $= 2 - 2 = 0$

$\therefore$ యుగ్మంలోని రేఖలు లంబరేఖలగును.

9. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనే సమీకరణం రేఖాయుగ్మాన్ని సూచిస్తే, మూల బిందువు నుంచి ఈ సరళరేఖలకు ఉన్న దూరాల లబ్ధం $\frac{|c|}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$ అని నిరూపించండి.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణం $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ సూచించు రేఖలు

$l_1x + m_1y = 0$ ....(1)

$l_2x + m_2y = 0$ ....(2) అనుకొనుము.

$\therefore\ ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = (l_1x + m_1y + n_1)(l_2x + m_2y + n_2)$

$$= l_1l_2x^2 + (l_1m_2 + l_2m_1)xy + m_1m_2y^2 + (l_1n_2 + l_2n_1)x + (m_1n_2 + m_2n_1)y + n_1n_2$$

ఇరువైపులా సజాతి గుణకాలను పోల్చగా

$l_1l_2 = a,\ l_1m_2 + l_2m_1 = 2h,\ m_1m_2 = b,\ l_1n_2 + l_2n_1 = 2g,\ m_1n_2 + m_2n_1 = 2f,\ n_1n_2 = c$

మూలబిందువు O(0, 0) నుండి (1) లంబదూరం $= \frac{|n_1|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}}$

అలాగే O(0, 0) నుండి (2) లంబదూరం $= \frac{|n_2|}{\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$

TSBIE

లంబదూరాల లబ్ధం $= \frac{|n_1|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}} \times \frac{|n_2|}{\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$

$$= \frac{|n_1 n_2|}{\sqrt{(l_1^2+m_1^2)(l_2^2+m_2^2)}}$$

$$= \frac{|n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 l_2^2 + l_1^2 m_2^2 + l_2^2 m_1^2 + m_1^2 m_2^2)}}$$

$$= \frac{|n_1 n_2|}{\sqrt{(l_1 l_2 -+ m_1 m_2)^2 + 2 l_1 l_2 m_1 m_2 + (l_1 m_2 + l_2 m_1)^2 - 2 l_1 m_2 l_2 m_1}}$$

$$= \frac{|n_1 n_2|}{\sqrt{(l_1 l_2 - m_1 m_2)^2 + (l_1 m_2 + l_2 m_1)^2}}$$

$$= \frac{|c|}{\sqrt{(a-b)^2 + (2h)^2}}$$

$$= \frac{|c|}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

10. $x + 2y = k$ అనే రేఖ $2x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - y - 1 = 0$ అనే వక్రాన్ని ఖండించే బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపితే వచ్చే రేఖలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటే, k విలువలు కనుగొనండి.

సాధన: ఇచ్చిన సరళరేఖా సమీకరణం $x + 2y = k \Rightarrow \frac{x+2y}{k} = 1$ ..... (1)

ఇవ్వబడిన దత్త యుగ్మ సమీకరణం $2x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - y - 1 = 0$ ..... (2)

(1), (2) ల ఖండన బిందువుల నుండి మూలబిందువుకు కలుపగా ఏర్పడిన యుగ్మసమీకరణం రాబట్టాలంటే (2) ను (1) చే సమఘాత పర్చాలి.

$\therefore 2x^2 - 2xy + 3y^2 + (2x - y)(1) - 1(1^2) = 0$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2xy + 3y^2 + (2x-y)\frac{(x+2y)}{k} - 1\frac{(x+2y)^2}{k^2} = 0$$

$$\Rightarrow k^2(2x^2 - 2xy + 3y^2) + k(2x^2 + 4xy - xy - 2y^2) - (x^2 + 4y^2 + 4xy) = 0$$

$$\Rightarrow x^2(2k^2 + 2k - 1) + xy(-2k^2 + 3k - 4) + y^2(3k^2 - 2k - 4) = 0$$

పై యుగ్మంలోని రేఖలు లంబంగా ఉంటే

x^2 గుణకం + y^2 గుణకం = 0

TSBIE

$\Rightarrow 2k^2 + 2k - 1 + 3k^2 - 2k - 4 = 0$

$\Rightarrow 5k^2 - 5 = 0$

$\Rightarrow 5k^2 = 5$

$\Rightarrow k^2 = 1$

$\Rightarrow k^2 = \pm 1$

11. **$3x - y + 1 = 0$ అనే రేఖ $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 5 = 0$ అనే వక్రాన్ని ఖండించే బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపితే వచ్చే రేఖల మధ్యకోణం కనుగొనండి.**

సాధన: ఇచ్చిన సరళరేఖా సమీకరణం $3x - y + 1 = 0 \Rightarrow y - 3x = 1$ ..... (1)

దత్త యుగ్మ సమీకరణం $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 5 = 0$ ..... (2)

(1), (2) ల ఖండన బిందువుల నుండి మూలబిందువుకు కలుపగా వచ్చు యుగ్మసమీకరణం పొందాలంటే (2) ను (1) చే సమఘాత పర్చాలి.

$\therefore$ ఆ సమీకరణం $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 5(1^2) = 0$

$$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 + (2x + 2y)(y - 3x) - 5(y - 32)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 + 2xy - 6x^2 + 2y^2 - 6xy - 5(y^2 + 9x^2 - 6xy) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 + 2xy - 6x^2 + 2y^2 - 6xy - 5y^2 - 45x^2 + 30xy = 0$$

$$\Rightarrow -50x^2 + 28xy - 2y^2 = 0$$

$$\Rightarrow 25x^2 - 14xy + y^2 = 0$$

పై యుగ్మ సమీకరణంలోని రేఖల మధ్యకోణం θ అయిన

$$\cos\theta = \frac{|a + b|}{\sqrt{(a - b)^2 + 4h^2}}$$

$a = 25, h = -7, b = 1$

$$\therefore \cos\theta = \frac{|25 + 1|}{\sqrt{(25 - 1)^2 + 4(-7)^2}}$$

$$= \frac{26}{\sqrt{276 + 196}}$$

$$= \frac{26}{\sqrt{4 \times 196}} = \frac{13}{\sqrt{193}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{13}{\sqrt{193}}\right)$$

TSBIE

12. మూలబిందువు కేంద్రంగా గల వృత్తం $x^2 + y^2 = a^2$ కు $lx + my = 1$ అనేది ఒక జ్యా. ఈ జ్యా మూల బిందువు వద్ద లంబకోణం చెయ్యడానికి నియమాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చిన వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ ..... (1)

జ్యా సమీకరణం $lx + my = 1$ ..... (2)

కావల్సిన యుగ్మ సమీకరణం కొరకు (2) చే (1) ని సమఘాత పర్చగా

$$x^2 + y^2 - a^2 (lx + my)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - a^2(l^2x^2 + m^2y^2 + 2lmxy) = 0$$

$$\Rightarrow x^2(1 - a^2l^2) - 2a^2lmxy + y^2(1 - a^2m^2) = 0$$

పై సరళరేఖా యుగ్మంలోని రేఖలు లంబంగా ఉండాలంటే

x^2 గుణకం + y^2 గుణకం = 0 కావాలి.

$\Rightarrow 1 - a^2l^2 + 1 - a^2m^2 = 0$

$\Rightarrow 2 = a^2l^2 + a^2m^2$

$\Rightarrow a^2(l^2 + m^2) = 2$

13. $lx + my = 1$ అనే రేఖ $x^2 + y^2 = a^2$ అనే వృత్తాన్ని ఖండించే బిందువులను మూల బిందువుకు కలిపితే వచ్చే రేఖలు ఏకీభవించడానికి నియమం కనుగొనండి.

సాధన: ఇచ్చిన సరళరేఖా సమీకరణం $lx + my = 1$ ..... (1)

మరియు వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ ..... (2)

(1) మరియు (2) ల ఖండన బిందువుల నుండి మూలబిందువుకు కలపగా వచ్చు యుగ్మ సమీకరణం రాబట్టాలండే (2) ను (1) చే సమఘాత పర్చగా

$$x^2 + y^2 - a^2 (1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - a^2(lx + my)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - a^2(l^2x^2 + m^2y^2 + 2lmxy) = 0$$

$$\Rightarrow (1 - a^2l^2)x^2 - 2a^2lmxy + (1 - a^2m^2)y^2 = 0$$

[$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ అనే యుగ్మంలోని రేఖలు ఏకీభవించాలంటే $h^2 = ab$ కావాలి]

$$\therefore (-a^2lm)^2 = (1 - a^2l^2)(1 - a^2m^2)$$

$$\Rightarrow a^4l^2m^2 = 1 - a^2m^2 - a^2l^2 + a^4l^2m^2$$

$$\Rightarrow a^2m^2 + a^2l^2 = 1$$

$$\Rightarrow a^2(l^2 + m^2) = 1$$

*****

TSBIE

యూనిట్ **5**

త్రిపరిమాణ నిరూపకాలు

→ అంతరాళంలోని రెండు బిందువులు $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ అయిన P, Q ల మధ్యదూరం

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

→ $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ అనే విభిన్న బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని

(i) m:n నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు నిరూపకాలు

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$$

(ii) $\overline{AB}$ మధ్యబిందువు నిరూపకాలు

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

→ $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ శీర్షాలు గల త్రిభుజ కేంద్రభాసం

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$$

→ $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4)$ శీర్షాలు గల చతుర్ముఖి కేంద్రభాసం

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}\right)$$

అతి స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. (5, −1, 7), (x, 5, 1) ల మధ్యదూరం 9 యూనిట్లు అయితే x ను కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చిన బిందువులు (5, –1, 7), (x, 5, 1) అనుకొనిన

దత్తాంశం నుండి $AB = 9$

$\Rightarrow AB^2 = 81$

$\Rightarrow (x-5)^2 + (5+1)^2 + (1-7)^2 = 81$

$\Rightarrow (x-5)^2 + 36 + 36 = 81$

$\Rightarrow (x-5)^2 = 9$

TSBIE

$\Rightarrow (x-5) = \pm 3$

$\Rightarrow x = 5 \pm 3$

$\Rightarrow x = 8, 2$

2. (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) బిందువులు ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.

సాధన: ఇచ్చిన బిందువులు A(1, 2, 3), B(2, 3, 1), C(3, 1, 2) అనుకొనిన

$$AB = \sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(1-3)^2} = \sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$BC = \sqrt{(3-2)^2+(1-3)^2+(2-1)^2} = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6}$$

$$CA = \sqrt{(1-3)^2+(2-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{(-2)^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$$

AB = BC = CA

$\therefore$ Δ ABC ఒక సమబాహు త్రిభుజం.

3. (5, 4, 6), (1, −1, 3), (4, 3, 2) శీర్షాలు గల త్రిభుజ కేంద్రభాసం కనుగొనండి.

సాధన: ఇచ్చిన బిందువులు $A(x_1, y_1, z_1) = (5, 4, 6)$

$B(x_2, y_2, z_2) = (1, -1, 3)$

$C(x_3, y_3, z_3) = (4, 3, 2)$ అనుకొనిన

Δ ABC కేంద్ర భాసం $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

$$= \left(\frac{5+1+4}{3}, \frac{4-1+3}{3}, \frac{6+3+2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{10}{3}, 2, \frac{11}{3}\right)$$

4. (2, 3, −4), (−3, 3, −2), (−1, 4, 2), (3, 5, 1) బిందువులు శీర్షాలుగా గల చతుర్ముఖి కేంద్రభాసం కనుగొనండి.

సాధన: ఇచ్చిన బిందువులు $A(x_1, y_1, z_1) = (2, 3, -4)$

$B(x_2, y_2, z_2) = (-3, 3, -2)$

$C(x_3, y_3, z_3) = (-1, 4, 2)$

$D(x_4, y_4, z_4) = (3, 5, 1)$ అనుకొనిన

ABCD శీర్షాలుగా గల చతుర్ముఖి కేంద్ర భాసం

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{2-3-1+3}{4}, \frac{3+3+4+5}{4}, \frac{-4-2+2+1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{15}{4}, \frac{-3}{4}\right)$$

TSBIE

5. (2, 4, −1), (3, 6, −1), (4, 5, 1) వరుస శీర్షాలు గల సమాంతర చతుర్భుజం నాలుగో శీర్షాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: ఇచ్చిన బిందువులు A(2, 4, −1), B(3, 6, −1), C(4, 5, 1) మరియు D (a, b, c) లు సమాంతర చతుర్భుజ శీర్షాలనుకొనిన

$\therefore$ AC మధ్యబిందువు = BD మధ్యబిందువు

$$\Rightarrow \left(\frac{2+4}{2}, \frac{4+5}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = \left(\frac{3+a}{2}, \frac{6+b}{2}, \frac{-1+c}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{6}{2}, \frac{9}{2}, 0\right) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+6}{2}, \frac{c-1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a+3}{2} = \frac{6}{2}, \frac{b+6}{2} = \frac{9}{2}, \frac{c-1}{2} = 0$$

$\therefore a = 3, b = 3, c = 1 \Rightarrow$ 4వ శీర్షం D(a, b, c) = (3, 3, 1)

6. A(1, 1, 1), B(−2, 4, 1) బిందువులు రెండు శీర్షాలుగా, మూల బిందువు కేంద్రభాసంగా గల త్రిభుజం ABC కి, శీర్షం C నిరూపకాలు కనుగొనండి.

సాధన: A(1, 1, 1), B(−2, 4, 1), C(x, y, z) అనుకొనిన Δ ABC కేంద్రభాసం = (0, 0, 0)

$$\Rightarrow \left(\frac{1-2+x}{3}, \frac{1+4+y}{3}, \frac{1+1+z}{3}\right) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-1}{3}, \frac{y+5}{3}, \frac{z+2}{3}\right) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \frac{a+3}{2} = \frac{6}{2}, \frac{b+6}{2} = \frac{9}{2}, \frac{c-1}{2} = 0$$

$\Rightarrow -1+x=0, \; 5+y=0, \; z+2=0$

$\Rightarrow x=1, \; y=-5, \; z=-2 \Rightarrow$ మూడో శీర్షం C(x, y, z) = (1, −5, −2)

7. (3, 2, −1), (4, 1, 1), (6, 2, 5) లు మూడు శీర్షాలుగా, (4, 2, 2) కేంద్రభాసంగా గల చతుర్ముఖి నాలుగో శీర్షాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: A(3, 2, −1), B(4, 1, 1), C(4, 1, 1), D(x, y, z) అనుకొనిన

ABCD శీర్షాలుగా ఉన్న చతుర్ముఖి కేంద్రభాసం = (4, 2, 2)

$$\Rightarrow \left(\frac{3+4+6+x}{4}, \frac{2+1+2+y}{4}, \frac{-1+1+5+z}{4}\right) = (4,2,2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{13+x}{4}, \frac{5+y}{4}, \frac{5+z}{4}\right) = (4,2,2) \Rightarrow \frac{13+x}{4} = 4, \frac{5+y}{4} = 2, \frac{5+z}{4} = 2$$

$\Rightarrow x=3, \; y=3, \; z=3 \Rightarrow$ నాలుగో శీర్షం D(x, y, z) = (3, 3, 3)

*****

TSBIE

యూనిట్ **6**

దిక్ కొసైన్‌లు, దిక్ సంఖ్యలు

→ $\overrightarrow{OP}$ కిరణం $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}$ లతో చేయు కోణాలు వరుసగా α, β, γ అయిన $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ లను ఆ కిరణం దిక్ కొసైన్లు అంటారు. వీటిని $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$ లతో సూచిస్తూ, $\overrightarrow{OP}$ దిక్ కొసైన్‌లను (l, m, n) గా సూచిస్తాం.

→ $\overrightarrow{OP}$ దిక్ కొసైన్‌లు (l, m, n) అయితే $\overrightarrow{PO}$ దిక్ కొసైన్‌లు $(-l, -m, -n)$

→ $(-l, -m, -n)$ ఒక రేఖ దిక్ కొసైన్‌లయిన $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

→ ఒక రేఖ దిక్ కొసైన్‌లకు అనుపాతంలో ఉండే వాస్తవ సంఖ్యాత్రయం (a, b, c) ని ఆ రేఖ దిక్ సంఖ్యలు అంటారు.

→ (a, b, c) దిక్ సంఖ్యలు గల రేఖ దిక్ కొసైన్‌లు $\pm\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$

→ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) బిందువులను కలిపే రేఖ

(i) దిక్ సంఖ్యలు $\left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$

(ii) దిక్ కొసైన్‌లు $\left(\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{\Sigma(x_2 - x_1)^2}}, \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{\Sigma(x_2 - x_1)^2}}, \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{\Sigma(x_2 - x_1)^2}}\right)$

→ (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) దిక్ కొసైన్‌లుగా గల రేఖల మధ్యకోణం θ అయిన $\cos\theta = \left|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2\right|$

→ (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) దిక్ సంఖ్యలుగా గల రేఖల మధ్యకోణం θ అయిన

$$\cos\theta = \frac{\left|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

TSBIE

దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (10 మార్కులు)

1. రెండు సరళరేఖల దిక్ కొసైన్‌లు $l + m + n = 0$, $mn - 2nl - 2lm = 0$ సమీకరణాలను తృప్తిపరిస్తే ఆ దిక్ కొసైన్‌లను కనుగొనండి.

సాధన: దత్తాంశం ప్రకారం $l + m + n = 0$ ....(1)

$mn - 2nl - 2lm = 0$ ....(2)

(1), (2) ల నుండి $l = -m + n$ ను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$mn - 2n(-m-n) - 2(-m-n)m = 0$$

$$\Rightarrow mn + 2mn + 2n^2 + 2m^2 + 2mn = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 4mn + mn + 2n^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2m(m+2n) + n(m+2n) = 0$$

$$\Rightarrow (m+2n)(2m+n) = 0$$

$\Rightarrow m + 2n = 0$ లేదా $2m + n = 0$

ఇప్పుడు $2m + n = 0 \Rightarrow n = -2m$

(1) నుండి $l = -m - (-2m) = m$

$\therefore l : m : n = m : m : -2m = 1:1:-2$

ఒక రేఖ దిక్ కొసైన్‌లు $\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}, \frac{-2}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}\right)$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

అలాగే $m + 2n = 0 \Rightarrow m = -2n$

(1) నుండి $l = -(-2n) - n = n$

$\therefore l : m : n = n : -2n : n = 1:-2:1$

మరో రేఖ దిక్ కొసైన్‌లు $\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}, \frac{-2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}, \frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}\right)$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

2. $l - 5m + 3n = 0$, $7l^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$ సమీకరణాలను తృప్తిపరిచేటట్లుగా, రెండు సరళరేఖల దిక్ కొసైన్‌లను కనుగొనండి.

సాధన: దత్త సమీకరణాలు $l - 5m + 3n = 0$ ....(1)

$7l^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$ ....(2)

(1) నుండి $l = 5m - 3n$ ను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

TSBIE

$$7(5m-3n)^2+5m^2-3n^2=0$$
$$\Rightarrow 7(25m^2+9n^2-30mn)+5m^2-3n^2=0$$
$$\Rightarrow 175m^2+63n^2-210mn+5m^2-3n^2=0$$
$$\Rightarrow 180m^2-210mn+60n^2=0$$
$$\Rightarrow 6m^2-7mn+2n^2=0$$
$$\Rightarrow (3m-2n)(2m-n)=0$$
$$\Rightarrow 3m-2n=0 \text{ లేదా } 2m-n=0$$

ఇప్పుడు $3m-2n=0 \Rightarrow m=\frac{2}{3}n$

(1) నుండి $l=5m-3n=\frac{10}{3}n-3n=\frac{10n-9n}{3}=\frac{n}{3}$

$\therefore l:m:n=\frac{n}{3}:\frac{2}{3}n:n=\frac{1}{3}:\frac{2}{3}:1=1:2:3$

ఒక రేఖ దిక్ కొసైన్‌లు $\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}},\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}},\frac{3}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}\right)$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

అలాగే $2m-n=0 \Rightarrow n=2m$

(1) నుండి $l=5m-3(2m)=5m-6m=-m$

$\therefore l:m:n=-m:m:2m=-1:1:2$

మరో రేఖ దిక్ కొసైన్‌లు $\left(\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}},\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}},\frac{2}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}}\right)$

$$=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

3. రెండు రేఖల దిక్ కొసైన్‌లు $l+m+n=0$, $l^2+m^2-n^2=0$ సమీకరణాలను తృప్తిపరిస్తే, వాటి మధ్య కోణాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: దత్త సమీకరణాలు $l+m+n=0$ ....(1)

$l^2+m^2-n^2=0$ ....(2)

(1) నుండి $l=-m-n$ ను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$(-m-n)^2+m^2-n^2=0$$
$$\Rightarrow m^2+n^2+2mn+m^2-n^2=0$$

TSBIE

$$\Rightarrow 2m^2 + 2mn = 0$$

$$\Rightarrow 2m(m+n) = 0$$

$\Rightarrow m = 0$ లేదా $m + n = 0$

ఇప్పుడు $m = 0$ అయిన (1) నుండి $l = 0 - n = -n$

$\therefore l : m : n = -n : 0 : n = -1:0:1$

ఒక రేఖ దిక్ సంఖ్యలు $(a_1, b_1, c_1) = (0, -1, 1)$

ఆ రేఖల మధ్య కోణం θ అయిన

$$\cos\theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} = \frac{|0\times(-1) + 0\times(-1) + 1\times 1|}{\sqrt{1+0+1}\sqrt{1+0+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

4. $3l + m + 5n = 0,\ 6mn - 2nl + 5lm = 0$ సమీకరణాలతో సూచించబడే దిక్ కొసైన్‌లు గల రేఖల మధ్యకోణం కనుగొనండి.

సాధన: దత్త సమీకరణాలు $3l + m + 5n = 0$ ....(1)

$6mn - 2nl + 5lm = 0$ ....(2)

(1) నుండి $m = -3l - 5n$ ను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$6(-3l - 5n)n - 2nl + 5l(-3l - 5n) = 0$$

$$\Rightarrow -18ln - 30n^2 - 2nl - 15l^2 - 25ln = 0$$

$$\Rightarrow -15l^2 - 45ln - 30n^2 = 0$$

$$\Rightarrow l^2 + 3ln + 2n^2 = 0$$

$$\Rightarrow (l + 2n)(l + n) = 0$$

$\Rightarrow l + 2n = 0$ లేదా $l + n = 0$

ఇప్పుడు $l + 2n = 0 \Rightarrow l = -2n$

అయిన (1) నుండి $m = -3(-2n) - 5n = 6n - 5n = n$

$\therefore l : m : n = -2n : n : n = -2:1:1$

ఒక రేఖ దిక్ సంఖ్యలు $(a_1, b_1, c_1) = (-2, 1, 1)$

అలాగే $l + n = 0 \Rightarrow l = -n$

(1) నుండి $m = -3l - 5n = -3(-n) - 5n = 3n - 5n = -2n$

$\therefore l : m : n = -n : -2n : n = -1:-2:1 = 1:2:-1$

రెండో రేఖ దిక్ సంఖ్యలు $(a_2, b_2, c_2) = (1, 2, -1)$

TSBIE

ఆ రేఖల మధ్య కోణం θ అయిన

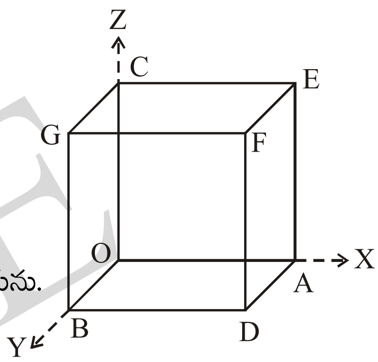
$$\cos\theta = \frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} = \frac{|(-2)\times 1+1\times 2+1\times(-1)|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$$

$$= \frac{|-1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$$

5. ఒక సమఘనం యొక్క రెండు కర్ణాళ మధ్యకోణం కనుగొనండి.

సాధన: ఘనం యొక్క శీర్షాలలో ఒకటైన O ను మూలబిందువుగా, సహవాసిక అంచులు $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ లను నిరూపాక్షాలుగాను మరియు $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = a$ గా తీసుకొనిన



ఘనం శీర్షాల నిరుపకాలు O(0, 0, 0), A(a, 0, 0), B(0, a, 0), C(0, 0, a), D(a, a, 0), E (a, 0, a), F(a, a, a), G (0, a, a) లు అగును.

ఘనం యొక్క నాలుగు కర్ణాలు $\overline{OF}, \overline{AG}, \overline{BE}, \overline{CD}$ అగును.

ఇప్పుడు $\overline{OF}$ దిక్ సంఖ్యలు $(a-0, a-0, a-0) = (a, a, a)$

$\overline{AG}$ దిక్ సంఖ్యలు $(0-a, a-0, a-0) = (-a, a, a)$

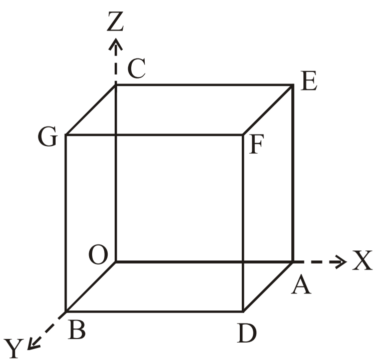
కర్ణాలు $\overline{OF}, \overline{AG}$ ల మధ్యకోణం θ అనుకొనిన

$$\cos\theta = \frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} = \frac{|a(-a)+a(a)+a(a)|}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\sqrt{a^2+a^2+a^2}}$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{3}a.\sqrt{3}a} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

6. ఒక కిరణం సమఘనం యొక్క నాలుగు కర్ణాలలో $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ కోణాలు చేస్తే $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$ విలువెంత?



సాధన: ఘనం యొక్క శీర్షాలలో ఒకటైన O ను మూలబిందువుగా, సహవాసిక అంచులు $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ లను నిరూపాక్షాలుగాను మరియు $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = a$ గా తీసుకొనిన

TSBIE

ఘనం శీర్షాల నిరుపకాలు O(0, 0, 0), A(a, 0, 0), B(0, a, 0),

C(0, 0, a), D(a, a, 0), E (a, 0, a), F(a, a, a), G (0, a, a) లు అగును.

ఘనం యొక్క నాలుగు కర్ణాలు $\overline{OF}, \overline{AG}, \overline{BE}, \overline{CD}$ అగును.

ఇప్పుడు $\overline{OF}$ దిక్ సంఖ్యలు $(a-0, a-0, a-0) = (a, a, a)$

$\overline{AG}$ దిక్ సంఖ్యలు $(0-a, a-0, a-0) = (-a, a, a)$

$\overline{BE}$ దిక్ సంఖ్యలు $(a-0, a-0, a-0) = (a, -a, a)$

$\overline{CD}$ దిక్ సంఖ్యలు $(a-0, a-0, 0-a) = (a, a, -a)$

కర్ణాలు $\overline{OF}, \overline{AG}, \overline{BE}, \overline{CD}$ లతో $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ కోణం చేయు కర్ణం దిక్ సంఖ్యలు (l, m, n) అనుకొనిన

అనగా కర్ణం $\overline{OF}$ ఆ కిరణంతో చేయు కోణం α అయిన

$$\cos\alpha = \frac{|al+am+an|}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = \frac{|a(l+m+n)|}{\sqrt{3a^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\therefore \cos^2\alpha = \frac{a^2(l+m+n)^2}{3a^2(l^2+m^2+n^2)} = \frac{(l+m+n)^2}{3(l^2+m^2+n^2)}$$

అలాగే

$$\cos^2\beta = \frac{(-l+m+n)^2}{3(l^2+m^2+n^2)},\ \cos^2\gamma = \frac{(l-m+n)^2}{3(l^2+m^2+n^2)},\ \cos^2\delta = \frac{(l+m-n)^2}{3(l^2+m^2+n^2)}$$

గా వ్రాయవచ్చును.

$$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{(-l+m+n)^2+(l-m+n)^2+(l+m-n)^2}{3(l^2+m^2+n^2)}$$

లవాన్ని సూక్ష్మీకరించగా

$$= \frac{4l^2+4m^2+4n^2}{3(l^2+m^2+n^2)} = \frac{4}{3}\frac{(l^2+m^2+n^2)}{(l^2+m^2+n^2)} = \frac{4}{3}$$

*****

TSBIE

యూనిట్ **7**

సమతలం

→ x, y, z లలో ప్రతి ఏకఘాత సమీకరణం ఒక సమ తలాన్ని సూచిస్తుంది.

→ అభిలంబ రూపంలో తల సమీకరణం $lx + my + nz = P$. ఇందులో (p, m, n) తలం అభిలంబరేఖ దిక్ కొసైన్‌లు మరియు P మూలబిందువు నుంచి తలానికి లంబదూరం.

→ తలం యొక్క సాధారణ సమీకరణ రూపం $ax + by + cz + d = 0$. దీనిలో (a, b, c) అభిలంబరేఖ దిక్ సంఖ్యలు.

→ a, b, c లు X, Y, Z-అంతరఖండాలుగా గల తలం సమీకరణం $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

→ $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ తలాల మధ్యకోణం θ అయిన

$$\cos\theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

(i) $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ అయితే పై తలాలు లంబాలు.

(ii) $\frac{a_1}{a_1} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ అయితే పై తలాలు సమాంతరాలు.

అతి స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. తలం సమీకరణం $x + 2y - 3z - 6 = 0$ ని అభిలంబ రూపానికి కుదించండి.

సాధన: ఇచ్చిన తల సమీకరణం $x + 2y - 3z - 6 = 0$ ఈ సమీకరణాన్ని x, y, z గుణకాల వర్గాల మొత్తానికి వర్గమూలం $\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$ చే ఇరువైపులా భాగించగా

$$\frac{x + 2y - 3z}{\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}} - \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

TSBIE

2. X, Y, Z - అంతరఖండాలు 1, 2, 4 గా కలిగిన సమతలం సమీకరణం వ్రాయండి.

సాధన: X, Y, Z - అంతరఖండాలు $a = 1, b = 2, c = 4$ అనుకొనిన

అంతరఖండ రూపంలో తల సమీకరణం $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$$\Rightarrow \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$$

$$\Rightarrow 4x+2y+z=4$$

3. $4x - 4y + 2z + 5 = 0$ సమీకరణాన్ని అంతరఖండ రూపంలోకి మార్చండి.

సాధన: ఇచ్చిన తల సమీకరణం $4x - 4y + 2z + 5 = 0$

$$\Rightarrow 4x-4y+2z=-5$$

ఇరువైపులా -5 చే భాగించగా

$$\Rightarrow \frac{4x-4y+2z}{5}=\frac{-5}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{2}{5}z=1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-5/4}+\frac{y}{5/4}+\frac{z}{-5/2}=1$$

4. $x + 2y + 2z - 5 = 0$, $3x + 3y + 2z - 8 = 0$ తలాల మధ్యకోణం కనుగొనండి.

సాధన: ఇచ్చిన తల సమీకరణం $x + 2y + 2z - 5 = 0$ .....(1)

$a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = 2$

మరో తల సమీకరణం $3x + 3y + 2z - 8 = 0$ .....(2)

$a_2 = 3, b_2 = 3, c_2 = 2$

$$\cos\theta = \frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$= \frac{|1\times 3+2\times 3+2\times 2|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{3^2+3^2+2^2}}$$

$$= \frac{|3+6+4|}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+9+4}} = \frac{13}{3\sqrt{22}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{13}{3\sqrt{22}}\right)$$

*****

TSBIE

యూనిట్ **8**

అవధులు

సూత్రాలు

* $\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$
* $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (x is in radians)
* $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\tan x}{x} = 1$ (x is in radians)
* $\underset{x \to 0}{Lt} (1+x)^{1/x} = e$
* $\underset{x \to 0}{Lt} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$
* $\underset{x \to 0}{Lt} \left(\dfrac{a^x - 1}{x}\right) = \log_e a$
* $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \dfrac{n}{m} a^{n-m}$
* $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin ax}{x} = a$ (x is in radians)
* $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\tan ax}{x} = a$ (x is in radians)
* $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. $\underset{x \to 0}{Lim} \dfrac{e^{x+3} - c^3}{x}$

జ: $= \underset{x \to 0}{Lim} \dfrac{e^x . e^3 - e^3}{x}$ $\boxed{a^{m+n} = a^m . a^n}$

$= \underset{x \to 0}{Lim} \; e^3 \dfrac{(e^x - 1)}{x}$

$= e^3 \underset{x \to 0}{Lim} \dfrac{e^x - 1}{x}$

$= e^3 . 1 = e^3$

2. $\underset{x \to 0}{Lim} \dfrac{e^x - \sin x - 1}{x}$

జ: $\underset{x \to 0}{Lim} \left(\dfrac{e^x - 1}{x} - \dfrac{\sin x}{x}\right)$

$$\underset{x\to 0}{Lim}\frac{e^x-1}{x}-\underset{x\to 0}{Lim}\frac{\sin x}{x}$$

$$1-1 \qquad =0$$

3. $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{\sin ax}{x\cos x}$

జ: $$\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin ax}{x\cos x}=\frac{\underset{ax\to 0}{Lt}\dfrac{\sin ax}{ax}a}{\underset{x\to 0}{Lt}\cos x}=\frac{a}{1}=a$$

4. $\underset{x\to \infty}{Lt}\dfrac{11x^3-3x+4}{13x^3-5x^2-7}$

జ: $$\underset{x\to \infty}{Lt}\frac{11x^3-3x+4}{13x^3-5x^2-7}$$

$$=\underset{x\to \infty}{Lt}\frac{x^3\left(11-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(13-\dfrac{5}{x}-\dfrac{7}{x^3}\right)}$$

As $x\to\infty, \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^2}$ and $\dfrac{1}{x^3}\to 0$

$$=\underset{x\to \infty}{Lt}\frac{11-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}}{13-\dfrac{5}{x}-\dfrac{7}{x^3}}=\frac{11-0+0}{13-0-0}=\frac{11}{13}$$

5. $\underset{x\to 1}{Lt}\dfrac{\sin(x-1)}{(x^2-1)}$

జ: $$\underset{x\to 1}{Lt}\frac{\sin(x-1)}{(x^2-1)}$$

$$\underset{x\to 1}{Lt}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}.\underset{x\to 1}{Lt}\frac{1}{x+1}$$

Put $y\equiv x-1$ so that as $x\to 1, y\to 0$

$$\boxed{\underset{x\to 1}{Lt}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}=\underset{y\to 0}{Lt}\frac{\sin y}{y}=1}$$

$$=1.\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

TSBIE

6. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin a x}{\sin b x} \quad b \neq 0, \ a \neq b$

ఔ: $\lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{\sin ax}{ax} \times ax}{\dfrac{\sin bx}{bx} \times bx}$

$$\frac{\lim_{ax \to 0} \dfrac{\sin ax}{ax}}{\lim_{bx \to 0} \dfrac{\sin bx}{bx}} \frac{a}{b}$$

$$\frac{1}{1} \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

7. $\mathop{Lt}_{x \to \infty} \dfrac{8|x|+3x}{3|x|-2x}$

ఔ: $x \to \infty \Rightarrow x > 0 \therefore |x| = x$

$$\mathop{Lt}_{x \to \infty} \frac{8|x|+3x}{3|x|-2x} = \mathop{Lt}_{x \to \infty} \frac{8x+3x}{3x-2x}$$

$$\mathop{Lt}_{x \to \infty} \frac{11x}{x} = 11$$

8. $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{b^x - 1}$

ఔ: $\lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{a^x - 1}{x}}{\dfrac{b^x - 1}{x}}$

$$\frac{\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}}{\lim_{x \to 0} \dfrac{b^x - 1}{x}}$$

$$= \frac{\log_e a}{\log_e b}$$

$$= \log_b a$$

9. $\mathop{Lt}_{x \to 0} \dfrac{e^{7x} - 1}{x}$

ఔ: As $x \to 0$

TSBIE

$\Rightarrow 7x \to 0$

$$\underset{7x \to 0}{Lt} \frac{e^{7x}-1}{7x} \times 7 = 7\left(\because \underset{x \to 0}{Lt} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \right)$$

10. $\underset{x \to 0}{Lt} \left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \right)$

జ: For $0 < |x| < 1$, we have

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} . \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$= \frac{1+x-1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$

$$\Rightarrow \underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

11. $\underset{x \to 0}{Lim} \frac{e^{\sin x}-1}{x}$

జ: $\underset{x \to 0}{Lim} \dfrac{\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}}{\frac{x}{x \sin x}}$

$$\underset{x \to 0}{Lim} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} \quad \underset{x \to 0}{Lim} \frac{\sin x}{x}$$

$$\underset{\sin x \to 0}{Lim} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} .1$$

$1.1 \qquad = 1$

12. $\underset{x \to 0}{Lim} \frac{\log(1+5x)}{x}$

జ: $\underset{x \to 0}{Lim} \log(1+5x)^{\frac{1}{x}}$ $\boxed{m \log x = \log x^m}$

$$\log\left(\underset{5x \to 0}{Lim} (1+5x)^{\frac{1}{5x}} \right)^5$$

$\log_e e^5$

$= 5 \log_e e$ $\boxed{\log_e e = 1}$ $\qquad = 5$

TSBIE

13. $\underset{x \to 0}{Lt}\left(\frac{2|x|}{x}+x+1\right)=3$ అని చూపండి

జ: $x \to 0+ \Rightarrow x > 0$

$|x| = x$

$\underset{x \to 0}{Lt}\left(\frac{2|x|}{x}+x+1\right)$

$= \underset{x \to 0}{Lt}\left(\frac{2x}{x}+x+1\right)$

$= 2+0+1=3$

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (4 మార్కులు)

1. $\underset{x \to 3}{Lim} \frac{x^2-8x+15}{x^2-9}$

జ: $\underset{x \to 3}{Lim} \frac{x^2-5x-3x+15}{(x-3)(x+3)}$

$\underset{x \to 3}{Lim} \frac{(x-5)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)}$

$= \frac{-\cancel{2}}{\cancel{6}\,3}$

$= \frac{-1}{3}$

2. గణించుము $\underset{x \to 0}{Lt}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-(1-x)^{\frac{1}{3}}}{x}\right]$

జ: $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-(1-x)^{\frac{1}{3}}}{x}$

$= \underset{(1+x) \to 1}{Lt} \frac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{(1+x)-1} + \underset{(1-x) \to 1}{Lt} \frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}-1^{\frac{1}{3}}}{(1-x)-1}$

$= \frac{1}{3}1^{-2/3} + \frac{1}{3}1^{-2/3} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

3. $\underset{x \to a}{Lt} \frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}$

TSBIE

జ: $$\underset{x\to a}{Lt}\frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}}\times\frac{\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}}{\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}}$$

$$\underset{x\to a}{Lt}\frac{(a+2x-3x)}{3a+x-4x}\cdot\frac{\sqrt{a+2x}+\sqrt{3}x}{\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}}$$

$$\underset{x\to a}{Lt}\frac{a-x}{3(a-x)}\quad\underset{x\to a}{Lt}\frac{\sqrt{a+2x}+\sqrt{3}x}{\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{3}.\frac{\not{2}\sqrt{3a}}{\not{4}\sqrt{a}}\qquad=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

4. $$\underset{x\to 0}{Lim}\ \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$$

జ: $$\underset{x\to 0}{Lim}\ \frac{-2\sin\frac{ax+bx}{2}\sin\frac{ax-bx}{2}}{x^2}$$

$$\boxed{\cos C-\cos D=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}}$$

$$-2\underset{x\to 0}{Lim}\ \frac{\frac{\sin(a+b)x}{2}}{x}\ \frac{\frac{\sin(a-b)x}{2}}{x}$$

$$-2\underset{x\to 0}{Lim}\ \frac{\frac{\sin(a+b)x}{2}}{\frac{(a+b)}{2}x}\left(\frac{a+b}{2}\right)\underset{x\to 0}{Lim}\ \frac{\frac{\sin(a-b)x}{2}}{\frac{(a-b)}{2}x}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$-2\underset{\frac{a+b}{2}x\to 0}{Lim}\ \frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)x}{\left(\frac{a+b}{2}\right)x}\frac{(a+b)}{2}\underset{\frac{a-b}{2}x\to 0}{Lim}\ \frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)x}{\frac{(a-b)}{2}x}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$-2.1\left(\frac{a+b}{2}\right).1\frac{(a-b)}{2}$$

$$-\frac{(a+b)(a-b)}{2}$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2}$$

5. $$\underset{x\to 0}{Lim}\frac{1-\cos 2mx}{\sin^2 nx}(m,n\in -z)$$

జ: $$\underset{x\to 0}{Lim}\frac{1-\cos 2mx}{\sin^2 nx}=\underset{x\to 0}{Lt}\frac{2\sin^2 mx}{\sin^2 nx}$$

TSBIE

$$= 2\frac{\left(\underset{x\to 0}{Lim}\frac{\sin mx}{mx}\right)^2}{\left(\underset{x\to 0}{Lim}\frac{\sin nx}{nx}\right)^2} = \frac{2m^2}{n^2}$$

6. $\underset{x\to 0}{Lim}\frac{\sin(a+bx)-\sin(a-bx)}{x}$

జ: $\boxed{\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}}$

$$\underset{x\to 0}{Lim}\, 2\cos\frac{a+bx+a-bx}{2}\;\frac{\sin\frac{(a+bx)-(a-bx)}{2}}{x}$$

$$2\cos\frac{2a}{2}\;\underset{x\to 0}{Lim}\;\frac{\sin bx}{bx}.b$$

$$2\cos a\times b\; = 2b\cos a$$

TSBIE

యూనిట్ **9**

అవకలనం

సూత్రాలు

* $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{du}{dx}+v\frac{dv}{dx}$
* $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
* $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$
* $\frac{d}{dx}(x)=1$
* $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$
* $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$
* $\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$
* $\frac{d}{dx}(\cot x)=-co\sec^2 x$
* $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$
* $\frac{d}{dx}(co\sec x)=-\cos ecx\cot x$
* $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$
* $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=\frac{-1}{1+x^2}$
* $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
* $\frac{d}{dx}(co\sec^{-1}x)=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
* $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$
* $\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\log a$
* $\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{x}$
* $\frac{d}{dx}(\sinh x)=\cosh x$
* $\frac{d}{dx}(\cosh x)=\sinh x$
* $\frac{d}{dx}(\tanh x)=\sec h^2 x$
* $\frac{d}{dx}(\coth x)=-\cos ech^2 x$
* $\frac{d}{dx}(\sec hx)=-\sec hx\tanh x$
* $\frac{d}{dx}(\cos echx)=-\cos echx\coth x$
* $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
* $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
* $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x)=\frac{1}{1-x^2}$

TSBIE

* $\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$

* $\frac{d}{dx}(\sec h^{-1}x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{1-x^2}}$

* $\frac{d}{dx}(\cos ech^{-1}x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. $y = \log(\sin(\log x))$, అయితే $\frac{dy}{dx}$ ను కనుక్కోండి.

జ: ఇరువైపుల '**x**' దృష్ట్యా అవకలనము చేయగ

$v = \log x, u = \sin v \quad y = \log u$

$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}; \frac{du}{dv} = \cos v; \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}; \frac{dv}{dx}$

$= \frac{1}{\sin(\log x)}.\cos(\log x)\frac{1}{x} = \frac{\cot(\log x)}{x}$

2. $f(x) = \log(\sec x + \tan x)$, అయితే $f'(x)$ ను కనుక్కోండి.

జ: ఇరువైపుల '**x**' దృష్ట్యా అవకలనము చేయగ

$u = \sec x + \tan x$ మరియు $y = \log u$

$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}, \frac{du}{dx} = \sec x.\tan x + \sec^2 x$

$= \sec x(\sec x + \tan x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$

$= \frac{1}{\sec x + \tan x}.\sec x(\sec x + \tan x) = \sec x$

3. కింది ప్రమేయాల అవకలనాలను కనుక్కోండి.

జ: (i) $\frac{d}{dx} x\tan^{-1} x = x\frac{d}{dx}\tan^{-1} x + \tan^{-1} x\frac{d}{dx}x$

$= \frac{x}{1+x^2} + \tan^{-1} x$

(ii) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(\log x) = \frac{1}{1+(\log x)^2}\ \frac{d}{dx}(\log x)$

$= \frac{1}{x\left[1+(\log x)^2\right]}$

TSBIE

(iii) $\frac{d}{dx} e^{\sin^{-1} x} = e^{\sin^{-1} x} \frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}}$

(iv) $x = e^{\sinh y}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} e^{\sinh y}$$

$$\frac{dx}{dy} = e^{\sinh y} \frac{d}{dy} \cosh y$$

$$\frac{dx}{dy} = e^{\sinh y} \cosh y$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^{\sinh y} \cosh y}$$

(v) $\frac{d}{dx} \sin(\cos(x^2))$

$$\cos(\cos(x^2)) \frac{d}{dx} \cos x^2$$

$$\cos(\cos(x^2))(-\sin x^2) \frac{d}{dx} x^2$$

$$\cos(\cos(x^2)) \sin(x^2) 2x$$

4. $\mathbf{f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{100}}$, **అయితే $\mathbf{f^1(1)}$ విలువను కనుక్కోండి.**

జ: ఇరువైపుల దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 ..... + 100x^{99}$$

$$f'(1) = 1 + 2 + 3 .... + 100$$

$$= \frac{100 \times 101}{2} = 5050 \left(\Sigma x = \frac{x(x+1)}{2} \right)$$

5. $\mathbf{f(x) = xe^x \sin x}$ **అయిన $\mathbf{f^1(x)}$ ను కనుక్కోండి.**

జ: ఇరువైపుల 'x' దృష్ట్యా అవకలనము చేయగ

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} xe^x \sin x$$

$$f^1(x) = xe^x \frac{d}{dx} \sin x + xsisnx \frac{d}{dx} e^x \sin x \frac{dx}{dx}$$

$$= xe^x \cos x + x \sin xe^x + e^x \sin x$$

6. $\mathbf{f(x) = e^x, g(x) = \sqrt{x}, g(x)}$ **దృష్ట్యా $\mathbf{f(x)}$ యొక్క అవకలనమును కనుక్కోండి.**

జ: $f(x) = e^x \quad g(x) = 5x$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} e^x$$

TSBIE

$$\frac{d}{dx}g(x)=\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{df(x)}{dg(x)}=\frac{\frac{df(x)}{dx}}{\frac{dg(x)}{dx}}=\frac{e^x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=2\sqrt{4}e^x$$

7. $\mathbf{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}}$ **అయితే** $\mathbf{\frac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}$ **అని చూపుము**

జ: ఇరువైపుల గ దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}+\frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}-1}\frac{dy}{dx}=0$$

$$x^{-\frac{1}{3}}+y^{-1/3}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

8. $\mathbf{y=\sin^{-1}\sqrt{x}}$ **అయిన** $\mathbf{\frac{dy}{dx}}$ **ను కనుక్కోండి.**

జ: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

TSBIE

9. $\mathbf{x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t}$ **అయిన** $\mathbf{\frac{dy}{dx}}$ **ను కనుక్కోండి.**

జ: ఇరువైపుల t దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t \quad \frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\ \frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}$$

$$=-\tan t$$

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (4 మార్కులు)

1. **ప్రాథమిక నియమాన్ని అనుసరించి క్రింది ప్రమేయాలు అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.**

జ: (i) $f(x)=\sin 2x$

$$f(x+h)=\sin 2(x+h)=\sin(2x+2h)$$

ప్రాథమిక సూత్రం

$$f^1(x)=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f^1(x)=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sin(2x+2h)-\sin 2x}{h}$$

$$\boxed{\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\,2\frac{\cos\left(\frac{2x+2h+2h}{2}\right)\sin\left(\frac{2x+2h-2x}{2}\right)}{h}$$

$$=2\underset{h\to 0}{Lt}\cos\frac{4x+2h}{2}\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sin\frac{2h}{2}}{h}$$

$$=2\cos\frac{4x}{2}.1$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\sin 2x \;\;=2\cos 2x$$

(ii) $f(x)=\tan 2x$

$f(x+h)=\tan 2(x+h)=\tan(2x+2h)$

ప్రాథమిక సూత్రం

$$f^1(x)=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lim}\frac{\tan(2x+2h)-\tan 2x}{h}$$

$$\underset{h\to 0}{Lim}\frac{\frac{\sin(2x+2h)}{\cos(2x+2h)}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{h}$$

$$\underset{h\to 0}{Lim}\frac{\frac{\sin(2x+2h)\cos 2x-\cos(2x+2h)\sin 2x}{\cos(2x+2h)\cos 2x}}{h}$$

$$\underset{h\to 0}{Lim}\frac{\sin[2x+2h-2h]}{h\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$\underset{2h\to 0}{Lim}\frac{\sin 2h}{2h}\times 2\underset{h\to 0}{Lim}\frac{1}{\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

TSBIE

$$1\times 2\frac{1}{\cos^2 2x} \qquad 2\sec^2 2x$$

(iii) $f(x)=ax^2+bx+c$

$$f^1(x)=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lim}\frac{[a[x+h]^2+b(x+h]-(ax^2+bx+c)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lim}\frac{a[x^2+2hx+h^2]+b[x+b]-(ax^2+bx+c)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lim}\frac{ax^2+2hax+ah^2+bx+bh+c-ax^2-bx-c}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lim}\frac{h(2x+b+ah)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}f(x)=2ax+b$$

2. $\mathbf{x^3+y^3-3axy=0}$ **అయితే** $\mathbf{\frac{dy}{dx}}$ **కనుక్కోండి**

జ: ఇరువైపుల 'x' దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dy}{dx}\left[x^3+y^3-3axy\right]=0$$

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3a\left[x\frac{dy}{dx}+y\frac{d}{dx}x\right]=0$$

$$x^2+y^2\frac{dy}{dx}-ax\frac{dy}{dx}-ay=0$$

$$(y^2-ax)\frac{dy}{dx}=ay-x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$$

3. $\mathbf{y=e^{a\sin^{-1}x}}$ **అయితే** $\mathbf{\frac{dy}{dx}=\frac{ay}{\sqrt{1-y^2}}}$ **అని నిరూపించండి**

జ: $y=e^{a\sin^{-1}x}$.......(1)

ఇరువైపుల 'x' దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

TSBIE

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}e^{a\sin^{-1}x}$$

$$=e^{a\sin^{-1}x}\frac{d}{dx}a\ \sin^{-1}x$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{a\sin^{-1}x}\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ya}{\sqrt{1+x^2}}\text{ from (1)}$$

4. $\tan^{-1}\left(\frac{\mathbf{a-x}}{\mathbf{1+ax}}\right)$ **యొక్క అవకలనము కొనుగొనుము**

జ: put $a=\tan A\Rightarrow A=\tan^{-1}a$

$=\tan B\Rightarrow B=\tan^{-1}c$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\ \tan B}\right)\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\left(\tan(A-B)\right)\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(A-B\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}a-\tan^{-1}x\right)$$

$$0-\frac{1}{1+x^2}\quad=-\frac{1}{1+x^2}$$

5. $\mathbf{x^y=e^{x-y}}$ **అయితే** $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}=\frac{\mathbf{\log x}}{\mathbf{(1+\log x)^2}}$ **అని చూపండి.**

జ: $x^y=e^{x-y}$

take log both sides

$\log_e x^y=\log_e e^{x-y}$

$y\log x=(x-y)\log_e e$

$x=y+y\log x$

$x=y(1+\log x)$

$$y=\frac{x}{(1+\log x)}$$

ఇరువైపుల 'x' దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{x}{1+\log x}$$

$$=\frac{(1+\log x)1-x\left(\frac{1}{x}\right)}{(1+\log x)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1+\log x-1}{(1+\log x)^2}$$

6. **$\sin y = x\sin(a+y)$ అయితే $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$ అని చూపండి (అనేది Π యొక్క గుణిజం కాదు)**

జ: $x=\frac{\sin y}{\sin(a+y)}$

ఇరువైపుల 'y' దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\sin(a+y)\cos y-\sin y\cos(a+y)}{\sin^2(a+y)}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\sin[a+y-y]}{\sin^2(a+y)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

TSBIE

దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. **$x=\frac{3at}{1+t^3}$ $y=\frac{3a\,t^2}{1+t^3}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుక్కోండి**

జ: ఇరువైపుల 't' దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{d}{dt}x=3a\frac{d}{dt}\left[\frac{t}{1+t^3}\right]$$

$$=3a\left[\frac{(1+t^3)\frac{dt}{dt}-t\frac{d}{dt}(1+t^3}{(1+t^3)^2}\right]$$

$$=3a\left[\frac{(1+t^3)-t.3t^2}{(1+t^3)^2}\right]$$

$$=3a\left[\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dt} = 3a\left[\frac{(1+t^3)\frac{d}{dt}t^2 - t^2\frac{d}{dt}(1+t^3)}{(1+t^3)^2}\right]$$

$$= 3a\left[\frac{(1+t^3)2t - t^2.3t^2}{(1+t^3)^2}\right]$$

$$= 3a\left[\frac{2t+2t^4-3t^4}{(1+t^3)^2}\right]$$

$$= 3a\left[\frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$$

$$= 3a\left[\frac{2t-t^4}{(1+3)^2}\right]\frac{(1+t^3)^2}{3a(1-2t^3)}$$

$$= \frac{t(2-t^3)}{3(1-2t^3)}$$

2. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$**, అయితే** $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ **అని చూపండి.**

జ: $x = \sin A \quad y = \sin B$ (అను) $\Rightarrow A = \sin^{-1}x \ \Rightarrow B = \sin^{-1}y$

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$$

Put $x = \sin\theta, y = \sin\phi$

$$\therefore \sqrt{1-\sin^2\theta} + \sqrt{1-\sin^2\phi} = a(\sin\theta - \sin\phi)$$

$$\cos\theta + \cos\phi = a(\sin\theta - \sin\phi)$$

$$2\cos\frac{\theta+\phi}{2}.\cos\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$= \left[2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}\right]$$

$$\therefore \cos\frac{\theta-\phi}{2} = a.\sin\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$\tan\frac{\theta-\phi}{2} = \frac{1}{2}; \frac{\theta-\phi}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

TSBIE

$\phi = \theta - 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)$;

$\sin^{-1} y = \sin^{-1} x - 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)$

Differentiating w.r.to x

$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $\mathbf{\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2} - \tan^{-1}\left(\frac{4x-4x^3}{1-6x^2+x^4}\right)}$ **అయిన** $\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}}$ **అని చూపుము.**

జ: $x = \tan\theta$ అనుకొనుము $\Rightarrow \theta = \tan^{-1} x$

$y = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right)$

$-\tan^{-1}\left(\frac{4\tan\theta - 4\tan^3\theta}{1-6\tan^2\theta + \tan^4\theta}\right)$

$= \tan^{-1}(\tan 2\theta) + \tan^{-1}(\tan 3\theta)$

$y = 2\theta + 3\theta - 4\theta$

$y = \theta$

$y = \tan^{-1} x$

ఇరువైపుల 'x' దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1++x^2}$

4. $\mathbf{y = \frac{x^3\sqrt{2+3x}}{(2+x)(1-x)}}$ **అయిన** $\mathbf{\frac{dy}{dx}}$ **విలువను కనుక్కోండి.**

జ: ఇరువైపుల log తీసుకొనగా

$\log y = \log\frac{x^3\sqrt{2+3x}}{(2+x)(1-x)}$

$= \log x^3 + \log\sqrt{2+3x} - \log(2+x) - \log(1-x)$

$\log y = 3\log x + \frac{1}{2}(2+3x) - \log(2+x) - \log(1-x)$

ఇరువైపుల 'x' దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x} + \frac{3}{2(2+3x)} - \frac{1}{2+x} + \frac{1}{1+x}$

TSBIE

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{3}{x} + \frac{3}{2(2+3x)} - \frac{1}{2+x} + \frac{1}{1+x}\right]$$

5. $\mathbf{y = x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2\log(x + \sqrt{a^2 + x^2})}$ **అయితే** $\mathbf{\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{a^2 + x^2}}$ **అని చూపండి.**

జ: (1) ని ఇరువైపుల 'x' దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}2x + \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}.2x\right]}{x + \sqrt{a^2+a^2}}$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{a^2\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right)}{\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right)\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= \frac{x^2+a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} + \sqrt{a^2+x^2}$$

$$= \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2+x^2}$$

$$= 2\sqrt{a^2+x^2}$$

6. $\mathbf{x^{logy} = logx}$ $\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left[\frac{1 - logxlogy}{(logx)^2}\right]}$ **అయిన అని చూపుము.**

జ: (1) కి ఇరువైపుల log తీసుకొనగా

$$\log x^{\log y} = \log(\log x)$$

$$\log y \ \log x = \log(\log x)$$

ఇరువైపుల 'x' దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$(\log y)\frac{1}{x} + \frac{\log x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log x}.\frac{1}{x}$$

$$\frac{\log x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\log x} - \frac{\log y}{x}$$

$$\frac{\log x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \log x \log y}{x(\log x)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left[\frac{1 - \text{logx logy}}{(\text{logx})^2}\right]$$

TSBIE

యూనిట్ **10**

దోషాలు - ఉజ్జాయింపులు

ముఖ్యాంశాలు

1. x లో స్వల్ప మార్పు Δx
2. x లో $x + \Delta x$ అయితే y మార్పు
   $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$
3. y యొక్క అవకలని $dy = f'(x).\Delta x$
4. y లో సాపేక్ష దోషం $= \dfrac{\Delta y}{y}$
5. y లో దోష శాతం $= \dfrac{\Delta y}{y} \times 100$

TSBIE

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $x = 10, \Delta x = 0.01$ అయినప్పుడు $y = x^2 + 3x + 6$ ప్రమేయానికి $dy, \Delta y$ విలువలు కనుక్కోండి.

సాధన: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$\Delta y = f(10 + 0.01) - f(10)$

$\Delta y = f(10.01) - f(10)$

$= (10.01)^2 + 3\times10.01 + 6 - (10^2 + 3\times10 + 6)$

$= 100.2001 + 30.03 + 6 - 100 - 30 - 6$

$= 130.2301 - 130$

$= 0.2301$

$\Delta y = f'(x)\Delta x$

$= (2x + 3)\Delta x$

$= (2 \times 10 + 3) \times 0.01$

$= 23 \times 0.01$

$= 0.23$

2. $x = 60^o$, $\Delta x = 1^o$ అయినప్పుడు $y = \cos x$ ప్రమేయానికి $dy, \Delta y$ విలువలు కనుక్కోండి.

సాధన: $x = 60^o$, $\Delta x = 1^o$

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$\Delta y = f(60^o + 1^o) - f(60^o)$

$= f(61^o) - f(60^o)$

$= \cos 61^o - \cos 60^o$

$= 04848 - 0.5 = - 0.0152$

$\Delta y = f'(x)\Delta x$

$= -\sin x.\Delta x$

$= -\sin 60^o \times 1^o$

$= - 0.866 \times 0.0174$ ($1^o = 0.0174$ రేడియన్స్)

$= - 0.0150$

3. $y = e^x + x$, $x = 5$, $\Delta x = 0.02$ అయిన ప్రమేయం y కి $dy, \Delta y$ లను కనుక్కోండి.

సాధన: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$= f(5 + 0.02) - f(5)$

$= f(5.02) - f(5)$

$= e^{5.02} + 5.02 - e^5 - 5$

$= e^{5.02} - e^5 + 0.02$

$\Delta y = f'(x)\Delta x$

$= (e^x + 1).\Delta x$

$= (e^5 + 1)(0.02)$

4. $y = 5x^2 + 6x + 6$, $x = 2$, $\Delta x = 0.001$ అయిన ప్రమేయం y కి $dy, \Delta y$ లను కనుక్కోండి.

సాధన: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$= f(2 + 0.001) - f(2)$

$= f(2.001) - f(2)$

$= 5(2.001)^2 + 6 \times 2.001 + 6 - (5 \times 2^2 + 6 \times 2 + 6)$

$= 5(4.004001) + 12.006 + 6 - 20 - 12 - 6$

$= 0.026005$

$\Delta y = f'(x)\Delta x$

$= (10x + 6).\Delta x$

$= (10 \times 2 + 6)(0.001)$

$= 26 \times 0.001 = 0.026$

TSBIE

5. ఒక చతురస్రపు భుజం పెరుగుదల 2% అయితే దీని వైశాల్యంలో ఉజ్జాయింపు పెరుగుదల శాతాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: చతురస్ర భుజం = x అనుకొనుము.

వైశాల్యం $A = x^2$

దత్తాంశం $\frac{\Delta x}{x} \times 100 = 2$ ......(1)

$$\Rightarrow \frac{\Delta A}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{\frac{\Delta A}{dx}}{A} = \frac{2x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\Delta A}{dx}}{A} \times 100 \times \Delta x = 2 \times \left(\frac{\Delta x}{dx} \times 100\right)$$

$= 2 \times 2$ ((1) నుండి)

$= 4$

6. ఒక చతురస్ర భుజంలో పెరుగుదల 4% అయితే ఆ చతురస్ర వైశాల్యంలో ఉజ్జాయింపు పెరుగుదల శాతాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: చతురస్ర భుజం = x అనుకొనుము.

వైశాల్యం $A = x^2$

దత్తాంశం $\frac{\Delta x}{x} \times 100 = 4$ ......(1)

$A = x^2 \Rightarrow \frac{\Delta A}{dx} = 2x$ (అవకలనము)

$$\Rightarrow \frac{\frac{\Delta A}{dx}}{A} \times 100 \times \Delta x = \frac{2x}{x^2} \times 100 \times \Delta x$$

$$= 2 \times \frac{\Delta x}{x} \times 100$$

$= 2 \times 4$ ((1) నుండి)

$= 8$

7. ఒక గోళ వ్యాసార్థం 14 సెం.మీ. గా కొలిచారు. తరవాత ఈ వ్యాసార్థం కొలవడంలో 0.02 సెం.మీ. దోషం ఉన్నట్లుగా గమనించారు. గోళ ఉపరితల వ్యాసార్థంలో ఉజ్జాయింపు దోషాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: గోళ వ్యాసార్థం = r అనుకొనుము.

వైశాల్యం $A = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dr} = 4\pi \times 2r$

ఉజ్జాయింపు దోషము $dA = \frac{dA}{dr} \times \Delta r$

TSBIE

$= 4\pi \times 2r \times \Delta r$

$= 8 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 0.02$

$= 7.04$ చ.సెం.మీ.

వక్రానికి స్పర్శరేఖ, అధిలంబ రేఖల సమీకరణాలు

1. $y = f(x)$ వక్రంపై (c, y) బిందువు వద్ద స్పర్శ రేఖ వాలు $\frac{dy}{dx}$

2. $y = f(x)$ వక్రంపై (a, b) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y - b = m(x - a)$ $\left(\because m = \frac{dy}{dx}\right)$

నిర్వచనం:

1. $y = f(x)$ వక్రంపై బిందువు P వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖకు లంబంగా ఉండే రేఖను అభిలంబరేఖ అంటారు.

2. అభిలంబ రేఖ వాలు $= -\frac{1}{m}$

3. అభిలంబ రేఖ సమీకరణం $y - b = -\frac{1}{m}(x - a)$

1. $y = 3x^2 - x^3$ వక్రం అక్షాన్ని ఖండించే బిందువల వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

సాధన: $y = 3x^2 - x^3$ —— (1)

x అక్షం సమీకరణం, $y = 0$ ---- (2)

(1), (2) ల ఖండన బిందువు

$3x^2 - x^3 = 0 \qquad (\because y = 0)$

$x^2(3 - x) = 0$

$x^2 = 0$ or $3 - x = 0$

$x = 0$ or $x = 3$

$\therefore$ x అక్షాన్ని వక్రము (0, 0), (3, 0) ల వద్ద ఖండిస్తుంది.

స్పర్శరేఖ వాలు M $= \frac{dy}{dx}_{(0,0)}$

$= 6x - 3x^2$

$= 6 \times 0 - 3 \times 0$

$= 0$

(0, 0) వద్ద స్పర్శ రేఖ సమీకరణం

$y - 0 = 0(x - 0)$

$\Rightarrow y = 0$

TSBIE

స్పర్శ రేఖ వాలు M $= \frac{dy}{dx}_{(3,0)}$

$= 6x - 3\times 2$

$= 6\times 3 - 3\times 3^2$

$= 18 - 27 = -9$

(3, 0) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$y - 0 = -9\,(x - 3)$

$y = -9x + 27$

$9x + y - 27 = 0$

2. $xy = C\ (C \neq 0)$ అనె వక్రానికి ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ అక్షాలతో కలిసి ఒక లంబకోణ త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. ఆ త్రిభుజ వైశాల్యం ఒక స్థిరరాశి అని చూపండి.

సాధన: $xy = c$ వక్రంపై బిందువు $P\,(x_1, y_1)$

అనుకొనుము $x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 0.$

$y = \frac{c}{x}$

ఇరువైపుల అవకలనం చేయగా

$\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{x^2}$

స్పర్శరేఖ వాలు $m = -\frac{c}{x_1^2}$ ($P(x_1, y_1)$ బిందువు వద్ద)

$P(x, y)$ వద్ద వక్రానికి స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$y - y_1 = -\frac{c}{x_1^2}\,(x - x_1)$

$y \cdot x_1^2 - y_1 x_1^2 = -cx + cx_1$

$cx + yx_1^2 = cx_1 + y_1 x_1^2$

$cx + yx_1^2 = cx_1 + y_1 x_1 x_1$

$cx + yx_1^2 = cx_1 + cx_1 \qquad (\because x_1 y_1 = c)$

$cx + yx_1^2 = 2cx_1$

$cx + yx_1^2 - 2cx_1 = 0$

TSBIE

త్రిభుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2}\left|\frac{c^2}{ab}\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{(-2c_1)^2}{c \times x_1^2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{4c^2 x_1^2}{c^2 \times x_1^2}\right| = 2c$$

= స్థిర రాశి

3. $y = 3x^4 - 4x$ వక్రానికి $x = 4$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖవాలు కనుక్కోండి ?

సాధన: $y = 3x^4 = 4x$

ఇరువైపుల అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = 3 \times 4x^3 - 4$$

స్పర్శ రేకావాలు ($x = 4$ వద్ద) $m = 12 \times 43 - 4$

$= 12 \times 64 - 4$

$= 768 - 4 = 764$

4. $y = x^2 - 3x + 2$ వక్రానికి x నిరూపకం 3 అయ్యే బిందువు వద్ద స్పర్శ రేఖ వాలు కనుక్కోండి.

సాధన: $y = x^3 - 3x + 2$

ఇరువైపుల దృష్ట్య అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$$

స్పర్శరేఖ వాలు ($x = 3$ వద్ద) $m = 3 \times 3^2 - 3$

$= 27 - 3 = 24$

4. $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ వక్రానికి $\theta = \frac{\pi}{4}$ వద్ద అభిలంబ రేఖ వాలు కనుక్కోండి ?

సాధన: $x = a\cos^3\theta,\ \ y = a\sin^3\theta$

ఇరువైపుల దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dx}{d\theta} = a3\cos^2\theta\,(-\sin\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a \times 3\sin^2\theta\,(\cos\theta)$$

TSBIE

స్పర్శరేఖవాలు $(m)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\dfrac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\cdot\sin\theta}=-\tan\theta=-\tan\dfrac{\pi}{4}$

$$m=-1$$

$\therefore$ అభిలంబ రేఖవాలు $=-\dfrac{1}{m}=\dfrac{-1}{-1}=1$

5. $\boldsymbol{x=1-a\sin\theta}$ **,** $\boldsymbol{y=b\cos^3\theta}$, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ **వద్ద అభిలంబ రేఖ వాలు కనుక్కోండి ?**

సాధన: $x=1-a\sin\theta,\quad y=b\cos^2\theta$

ఇరువైపుల θ దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dx}{d\theta}=-a\cos\theta,\qquad \frac{dy}{d\theta}=2b\cos\theta(-\sin\theta)$$

స్పర్శరేఖవాలు $(\theta=\dfrac{\pi}{2}$ వద్ద$)$ $m=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\dfrac{-2b\cos\theta\sin\theta}{-a\cos\theta}$

$$=\frac{2b}{a},\sin\frac{\pi}{2}$$

$$m=\frac{2b}{a}$$

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ వద్ద అభిలంబ రేఖ వాలు $=-\dfrac{1}{m}$

$$=-\frac{1}{2b/a}$$

$$=\frac{-a}{2b}$$

6. $\boldsymbol{y=x^2-4x+2}$ **వక్రానికి (4, 2) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేకల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.**

సాధన: $y=x^2-4x+2$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx}=2x-4$$

స్పర్శరేఖ వాలు ((4,2) బిందువు వద్ద) $m=2\times u-4=4$

స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

TSBIE

$$y - 2 = 4\,(x - 4)$$
$$y - 2 = 4x - 16$$
$$4x - y - 16 + 2 = 0$$
$$4x - y - 14 = 0$$

అభి లంబ రేఖ వాలు = $-\dfrac{1}{m} = -\dfrac{1}{4}$

అభిలంబ సమీకరణం $y - 2 = -\dfrac{1}{4}(x - 4)$

$$4y - 8 = -x + 4$$
$$x + 4y - 8 - 4 = 0$$
$$x + 4y - 12 = 8.$$

7. $y = x^3 + 4x^2$ వక్రాన్ని (–1, 3) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబ రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి ?

సాధన: $y = x^3 + 4x^2$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 8x$$

స్పర్శ రేఖ వాలు ((–1, 3) బిందువు వద్ద) $m = 3 \times (-1)^2 + 8(-1)$
$$= 3 - 8$$
$$= -5$$

స్పర్శరేఖ సమీకరణం $= y - 3 = -5\,(x + 1)$
$$y - 3 = -5x - 5$$
$$5x + y + 2 = 0$$

అభిలంబ రేఖవాలు $= -\dfrac{1}{m}$

$$= \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$$

అభిలంబ రేఖ సమీకరణం

$$y - 3 = \frac{1}{5}\,(x + 1)$$
$$5y - 15 = x + 1$$
$$x - 5y - 16 = 0$$

TSBIE

8. $y = 2e^{-\frac{x}{3}}$ **వక్రం y అక్షాన్ని ఖండించే బిందువు వద్ద అ వక్రానికి స్పర్శరేఖ, అభిలంబ రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి?**

సాధన: $y = 2e^{-\frac{x}{3}}$, వక్రం, y అక్షాన్ని ఖండించే బిందువు (0, 2)

$y = 2e^{-\frac{x}{3}}$ $\quad [\because y = 2e^{-\frac{x}{3}} = 2]$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{-x/3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot e^{-x/3}$$

స్పర్శ రేఖ వాలు ($x = 0$ వద్ద) $m = -\frac{2}{3} \cdot e^{-0/3} = -\frac{2}{3}$

స్పర్శ రేఖ సమీకరణం (0, 2) బిందువు వద్ద

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 0)$$

$$3y - 6 = -2x$$

$$2x + 3y - 6 = 0$$

అభిలంబ రేఖ వాలు $= -\frac{1}{m} = \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

అభిలంబ రేఖ సమీకరణం

$$y - 2 = \frac{3}{2}\ (x - 0)$$

$$2y - 4 = 3x$$

$$3x - 2y + 4 = 0$$

9. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ **వక్రం పై ఏదేని బందువు వద్ద స్పర్శరేఖ నిరూపకాక్షాలను A, B బిందువులలో ఖండిస్తే AB పొడవు స్థిరమని చూపండి.**

సాధన: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ వక్రం పై ఏదేని బిందువు P (x_1, y_1) అనుకొనుము.

$$x_1^{2/3} + y_1^{2/3} = a^{2/3} \quad \text{.... (1)}$$

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

TSBIE

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}\cdot y^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

$P(x_1, y_1)$ వద్ద స్పర్శ రేఖవాలు

$$m=-\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{1/3}$$

వక్రానికి $P(x_1, y_1)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$$y-y_1=-\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{1/3}\cdot\left(x-x_1\right)$$

$$y\cdot y_1-y_1\cdot x_1^{1/3}=-x\cdot y_1^{1/3}\left(y_1\right)^{1/3}\cdot x_1$$

$$\frac{x\cdot y_1^{1/3}}{y_1^{1/3}x_1^{1/3}}+\frac{y\cdot x_1^{1/3}}{y_1^{1/3}\cdot x_1^{1/3}}=\frac{x_1y_1^{1/3}}{y_1^{1/3}x_1^{1/3}}+\frac{x_1^{1/3}\cdot y_1}{y_1^{1/3}\cdot x_1^{1/3}}$$

$$=\frac{x}{x_1^{1/3}}+\frac{y}{y_1^{1/3}}=x_1^{2/3}+y_1^{2/3}$$

$$=\frac{x}{x_1^{1/3}}+\frac{y}{y_1^{1/3}}=a^{2/3}\quad\text{(from eqn–1)}$$

పై సమీకరణం సూచించే స్పర్శరేఖ x అక్షాన్ని

A $\left(a^{2/3}\cdot x_1^{1/3},0\right)$, y అక్షాన్ని B$\left(0,a^{2/3}\cdot y_1^{1/3}\right)$

బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది.

$$AB=\sqrt{\left(a^{2/3}\cdot x_1^{2/3}\right)^2+\left(a^{2/3}\cdot y_1^{1/3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(a^{2/3}\right)^2\left(x_1^{2/3}\cdot y_1^{2/3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{a^{4/3}\cdot a^{2/3}}\qquad\text{(from eqn–1)}$$

TSBIE

$= \sqrt{a^{6/3}}$

$= \sqrt{a^2}$

$= a =$ స్థిరము

స్పర్శరేఖ, అభిలంబ రేఖల పొడవులు, ఉపస్పర్శ ఖండం, ఉపలంబ ఖండము

1. స్పర్శ రేఖ పొడవు $= \left|\dfrac{y^1 \cdot \sqrt{1+\left(y^1\right)^2}}{y^1}\right|$

2. అభిలంబ రేఖ పొడవు $= \left|y^1 \cdot \sqrt{1+\left(y^1\right)^2}\right|$

3. ఉప స్పర్శ రేఖ పొడవు $= \left|\dfrac{y}{y^1}\right|$

4. ఉపలంబ ఖండం పొడవు $= \left|y \cdot y^1\right|$

1. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ వక్రంపై ఏ బిందువు వద్దనైనా ఉపస్పర్శ ఖండం స్థిరమని చూపండి.

సాధన: $y = a^x$ ఇరువైపుల దృష్ట్యా x అవకలనం చేయగా

$y^1 = a^x . \log a$

ఉపస్పర్శ ఖండం $= \left|\dfrac{y}{y^1}\right|$

$= \left|\dfrac{a^x}{a^x \log a}\right|$

$= \left|\dfrac{1}{\log a}\right|$ స్థిరము

TSBIE

2. $y = b\sin\frac{x}{a}$ **వక్రంపై ఏదైనా బిందువు వద్ద ఉపస్పర్శ ఖండం, ఉపలంబ ఖండాలను కనుక్కోండి.**

సాధన: $y = b\sin\frac{x}{a}$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$y^1 = b\cos\frac{x}{a}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$y^1 = \frac{b}{a}, \cos\frac{x}{a}$$

ఉపస్పర్శ ఖండం $= \left|\frac{y}{y^1}\right|$

$$= \left|\frac{b\sin\frac{x}{a}}{\frac{b}{a}\cdot\cos\frac{x}{a}}\right|$$

$$= a\cdot\tan\frac{x}{a}$$

ఉప లంబ ఖండం $= \left|y\cdot y^1\right|$

$$= \left|b\sin\frac{x}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot\cos\frac{x}{a}\right|$$

$$= \left|\frac{b^2}{2a}\times 2\sin\frac{x}{a}\cdot\cos\frac{x}{a}\right|$$

$$= \left|\frac{b^2}{2a}\cdot\sin\frac{2x}{a}\right|$$

3. $y = be^{x/a}$ **అనే వక్రంపై ఏదైనా బిందువు (x, y) వద్ద. ఉపస్పర్శ ఖండం స్థిరమనీ, ఉపలంబ ఖండము $\frac{y^2}{a}$ అని చూపండి.**

సాధన: $y = be^{x/a}$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

TSBIE

$$y^1 = be^{x/a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a} \cdot e^{x/a}$$

ఉపస్పర్శ ఖండం = $\left|\frac{y}{y^1}\right| = \left|\frac{be^{x/a}}{\frac{b}{a} \cdot e^{x/a}}\right| = |a| =$ స్థిరము

ఉపలంబ ఖండము = $\left|y\ y^1\right| = \left|be^{x/a} \cdot \frac{b}{a} \cdot e^{x/a}\right| = \left|\frac{\left(b\ e^{x/a}\right)^2}{a}\right| = \frac{y^2}{a}$

4. $x = a(t + \sin t), y = a(1 - \cos t)$ **వక్రంపై ఏదైనా బిందువు** t **వద్ద స్పర్శరేఖ పొడవు, అభిలంబ రేఖ పొడవు, ఉపస్పర్శ ఖండము, ఖండం ఉపలంబ ఖండాలను కనుక్కోండి.**

సాధన: $x = a(t + \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$

$y = a^x$

ఇరువైపుల దృష్ట్యా $'t'$ అవకలనం చేయగా

$$\frac{dx}{dt} = a(1+\cos t),\quad \frac{dy}{dt} = a\sin t$$

$$y^1 = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a\sin t}{a(1+\cos t)} = \frac{2\sin t/2 \cdot \cos t\, t/2}{2\cos^2 t/2}$$

$$= \frac{\sin t/2}{\cos t/2} = \tan t/2$$

స్పర్శరేఖ పొడవు $= \left|\frac{y\cdot\sqrt{1+\left(y^1\right)^2}}{y^1}\right| = \left|\frac{a(1-\cos t)\sqrt{1+\tan^{2t/2}}}{\tan\ t/2}\right|$

$$= \left|\frac{a\cdot 2\sin^{2t/2}\cdot\sqrt{\sec^{2t/2}}}{\tan^{t/2}}\right|$$

$$= \left|\frac{a\cdot 2\sin^{2t/2}}{\frac{\sin^{t/2}}{\cos^{t/2}}} \times \frac{1}{\cos t^{t/2}}\right| = 2a\sin^{t/2}$$

TSBIE

అభిలంబ రేఖ పొడవు = $\left| y\sqrt{1+\left(4^{1}\right)^{2}} \right|$

$= \left| a\left(1-\cos t\right)\cdot\sqrt{1+\tan^{2t/2}} \right|$

$= \left| 2a\cdot\sin^{2t/2}\cdot\sqrt{\sec^{2t/2}} \right|$

$= \left| 2a\cdot\sin^{2t/2}\cdot\dfrac{\sin^{2t/2}}{\cos^{2t/2}} \right|$

$= \left| 2a\sin^{2t/2}\cdot\tan^{t/2} \right|$

ఉపస్పర్శ ఖండము = $\left|\dfrac{y}{y^{1}}\right| = \left|\dfrac{a\left(1-\cos t\right)}{\tan^{t/2}}\right|$

$= \left|\dfrac{a\left(1-\cos t\right)}{\dfrac{\sin^{t/2}}{\cos^{t/2}}}\right| = 2a\sin^{t/2}\cdot\cos^{t/2}$

ఉపలంబ ఖండము = $\left| y\; y^{1} \right| = \left| 2\left(1-\cos t\right)\cdot\tan^{t/2} \right|$

$= \left| 2a\sin^{2t/2}\cdot\tan^{t/2} \right|$

5. $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ వక్రంపై ఏదైనా బిందువు t వద్ద ఉపస్పర్శ ఖండం ఉపలంబ ఖండాలను కనుక్కోండి.

సాధన: $x = a(\cos t + t\sin t)$

ఇరువైపుల t దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dx}{dy} = a(-\sin t + \sin t + t\cos t)$$

$$= a\,t\cos t.$$

$y = a(-\sin t - t\cos t)$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dx}{dy} = a(\cos t - \cos t + t\sin t)$$

$= a\ t\ \sin t.$

$$y^1 = \frac{dx}{dy} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{at\sin t}{at\cos t} = \tan t$$

ఉపస్పర్శ ఖండము = $\left|\frac{y}{y^2}\right| = \left|\frac{a(\sin t - t\cos t)}{\tan t}\right|$

= $(ac\ \sin t - t\cos t).\cot t$

ఉపలంబ ఖండము = $\left|y\ y^1\right| = \left|a(\sin t - t\cos t)\cdot \tan t\right|$

రెండు వక్రాల మధ్య కోణం

1. రెండు వక్రాలు ఖండించుకునే బిందువు వద్ద గీసిన స్పర్శ రేఖల మధ్యకోణమును వక్రాల మధ్య కోణం అని అందురు.
2. వక్రాల ఖండన బిందువు వద్ద గీసిన స్పర్శ రేకల వాలులు అయితే వక్రాల మధ్య కోణం అయిన
3. అయితే వక్రాలకు ఉమ్మడి స్పర్శరేక ఉంటుంది. అవి స్పృశించుకొంటాయి.
4. అయితే వక్రాలు లంబంగా ఖండించుకొంటాయి.

TSBIE

1. $y^2 = 4(x+1), y^2 = 36(9-x)$ వక్రాలు లంబంగా ఖండంచుకొంటాయని చూపండి.

సాధన: $y^2 = 4(x+1), y^2 = 36\ (9-x)$ వక్రాల కండన బిందువులు కనుక్కోవాలి.

$\therefore\ 4(x+1) = 36\ (9-x)$

$x + 1 = 9\ (9-x)$

$x + 1 = 81 - 9x$

$x + 9x = 81 - 1$

$10\ x = 80$

$x = 8$

$y^2 = 4\ (x+1)$

$y^2 = 4\ (8+1)$

$y^2 = 4 \times 9$

$y = 26$

వక్రాల ఖండన బిందువులు (8, 6), (8, −6)

$$y^2 = 4(x+1) \Rightarrow 2y\cdot\frac{dy}{dx} = 4$$

$$= \frac{dy}{dx} = \frac{4}{2y} = \frac{2}{y}$$ (మొదటి వక్రం)

$$y^2 = 36(9+x) \Rightarrow 2y \cdot \frac{dy}{dx} = -36$$

$$= \frac{dy}{dx} = -\frac{36}{2y} = -\frac{18}{y}$$ (రెండో వక్రం)

$y^2 = 4(x + 1)$ వక్రానికి (2,6) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $m_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$y^2 = 36(9 + x)$ వక్రానికి (2,6) బిందువు వద్ద స్పర్శ రేఖ వాలు $m_2 = \frac{-18}{6} = -3$

$m_1 \times m_2 = \frac{1}{3} \times (-3) = -1$ మరియు వద్ద లంబంగా ఖండించుకొంటాయి.

2. ***$ax^2 + bx = 1, a, x^2 + b_1y^2 = 1$*** **వక్రాలు లంబంగా ఖండించుకోవడానికి నియమం** $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1}$ **అని చూపండి.**

సాధన: $ax^2 + bx = 1, a, x^2 + b_1y^2 = 1$వక్రాల ఖండన బిందువు

$P(x_1, y_1)$ అని అనుకొనుము

$\therefore\ a{x_1}^2 + b{y_1}^2 - 1 = 0\ ,\quad a_1{x_1}^2 + b_1{y_1}^2 - 1 = 0$

$\therefore$ $x_1^2 = y_1^2 =$	x_1^2	y_1^2	1	
	b	-1	a	b
	b_1	-1	a_1	b_1

$$\frac{x_1^2}{-b+b_1} = \frac{y_1^2}{-a_1+a} = \frac{1}{ab_1 - a_1b} \qquad .... (1)$$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$ వద్ద $ax^2 + by^2 = 1$ వక్రానికి స్పర్శరేఖ వాలు

$$2ax + 2by^2 \,.\, y^1 = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{-2ax}{2by} = \frac{-ax}{by}$$

$$\therefore\ m_1 = \frac{ax_1}{by_1}$$

అదేవిధంగా $P(x_1, y_1)$ వద్ద $a_1x^2 + b_1y^2 = 1$ వక్రానికి స్పర్శరేఖ వాలు

$$m_1 = \frac{a_1x_1}{b_1x_1}$$

TSBIE

వక్రాలు లంబంగా ఖండించుకోంటాయి కావున

$$m_1 m_2 = -1$$

$$-\frac{ax_1}{by_1} \times \frac{a_1 x_1}{b_1 y_1} = -1$$

$$\frac{aa_1}{bb_1} \cdot \frac{x_1^2}{y_1^2} = -1$$

$$\frac{x_1^2}{y_1^2} = -\frac{bb_1}{aa_1}$$

$$\frac{b_1 - b}{a - a_1} = \frac{-bb_1}{aa_1} \qquad (eqb\text{---}(1) \text{ నుండి})$$

$$b_1.aa_1 - b.aa_1 = -abb_1 + ba_1b_1$$

$$a\, a_1b_1 - ba_1b_1 = aba_1 - abb_1$$

$$a_1\, b_1\, (a-b) = ab\, (a_1 - b_1)$$

$$\frac{a-b}{ab} = \frac{a_1 - b_1}{a_1 b_1}$$

$$\frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \frac{a_1}{a_1 b_1} - \frac{b_1}{a_1 b_1}$$

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{a_1}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1}$$

3. $x + y + 2 = 0, x^2 + y^2 - 10y = 0$ వక్రాలు మధ్య కోణం కనుక్కోండి

సాధన: $x + y + 2 = 0$

$$\Rightarrow x = -(y + 2)$$

$$x^2 + y^2 - 10y = 0$$

$$(-(y + 2))^2 + y^2 - 10y = 0$$

$$y^2 + 4y + 4 + y^2 - 10y = 0$$

$$2y^2 - 6y + 4 = 0$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$(y - 1)(y - 2)$$

$$y = +1 \text{ or } y = 2$$

$y = 1\ x = -(1 + 2) = -3$

$y = 2\ x = -(2 + 2) = -4$

వక్రాల ఖండన బిందువులు (–3 , 1), (–4, 2)

(–3, 1) బిందువు వద్ద $x + y + 2 = 0$ వక్రానికి స్పర్శరేఖ వాలు

$$1 + y^1 = 0$$
$$y^1 = -1$$
$$m_1 = -1$$

$x^2 + y^2 - 10\,y = 0$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$2x + 2y \,.\, y^1 - 10 \,.\, y^1 = 0.$

$$y^1 = \frac{-2x}{2y-10}$$

$$m_2 = \frac{-2\times(-3)}{2(+1)+10}$$

$$= \frac{6}{2-10} = \frac{6}{-8} = \frac{-3}{4}$$

వక్రాల మధ్యకోణం అయిన

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{-1+3/4}{1+(-1)(-3/4)}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{-4+3}{4}}{\frac{4+3}{4}}\right|$$

$$= \left|\frac{-1}{7}\right|$$

$$= \frac{1}{7}$$

$$\theta = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$$

TSBIE

4. $y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 5$ **వక్రాల మధ్య కోణంను కనుక్కోండి.**

సాధన: $y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 5$

$\Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x + 5)(x - 1) = 0$

$x = -5$ or 1

$x = 1 \Rightarrow y^2 = 4 \times 1$

$\Rightarrow y^2 = 4$

$y = \pm 2$

వక్రాల ఖండన బిందువులు (1, 2) మరియు (1, −2)

$y^2 = 4x$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$2y \cdot y^1 = 4$

$$y^1 = \frac{4}{2y} = \frac{2}{y}$$

(1, 2) బిందువు వద్ద వక్రానికి స్పర్శరేఖ వాలు $= \frac{2}{2} = 1$

$x^2 + y^2 = 5$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$2x + 2y1/1^1 = 0 \Rightarrow y^1 = \frac{-x}{y}$

(1, 2) బిందువు వద్ద వక్రానికి స్పర్శరేఖ వాలు

$$m_2 = -\frac{1}{2}$$

వక్రాల మధ్య 'θ' కోణం అయిన

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$\tan\theta = \left|\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + (1)\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|$$

$$= \left| \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \right| = 3$$

$\tan\theta = 3$

$\theta = \tan^{-1}(3)$

5. $x^2 = 2(y+1)$; $y = \frac{8}{x^2+4}$ **వక్రాల మధ్య కోణం కనుక్కోండి**

సాధన: $x^2 = 2(y+1),\ y = \frac{8}{x^2+4}$

$\Rightarrow x^2 + 4 = \frac{8}{y}$

$x^2 = \frac{8}{y} - 4$

$\therefore \frac{8}{y} - 4 = 2(y+1)$

$\frac{8}{y} = 2y + 2 + 4$

$\frac{8}{y} = 2y + 6$

$\frac{4}{y} = y + 3$

$4 = y^2 + 3y$

$y^2 + 3y - 4 = 0$

$(y+4)(y-1) = 0$

$y = -4$ or $y = 1$

$x^2 = 2(1+1)$

$x^2 = 2 \times 2$

$x = \pm 2$

ఖండన బిందువులు (2,1) మరియు (2, −1)

$x^2 = 2(y+1)$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

TSBIE

$2x = 2y^1$

$y^1 = x$

(2, 1) బిందువు వద్ద వక్రానికి స్పర్శ రేఖ వాలు $m_1 = 2$

$$y = \frac{8}{x^2+4}$$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$y^1 = -\frac{8}{\left(x^2+4\right)^2}\cdot 2x$$

(2, 1) బిందువు $y = \frac{8}{x^2+4}$ వక్రానికి స్పర్శ రేఖ వాలు

$$m_2 = \frac{-16\times 2}{\left(2^2+4\right)^2} = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2}$$

$$m_1 \times m_2 = 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$\therefore$ వక్రాలు పరస్పరం లంబంగా ఖండించుకొంటాయి.

6. $6x^2 - 5x + 2y = 0$, $4x^2 + 8y^2 = 3$ వక్రాలు $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ బిందువు వద్ద స్పృశించుకొంటాయని చూపండి.

సాధన: $6x^2 - 5x + 2y = 0$

ఇరువైపుల దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$6 \times 2x - 5 + 2y^1 = 0$

$2y^1 = 5 - 12x$

$$y^1 = \frac{5-12x}{2}$$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ బిందువు వద్ద వక్రానికి వాలు $m_1 = \dfrac{5-12\times\frac{1}{2}}{2}$

$$= \frac{5-6}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

TSBIE

$4x^2 + 8y^2 = 3$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$4 \times 2x + 8 \times 2y.y^1 = 0$$

$$y^1 = \frac{-8x}{16y} = \frac{-x}{2y}$$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ వద్ద వక్రానికి స్పర్శరేఖ వాలు $m_2 = \frac{-\frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad m_1 = m_2$$

$\therefore \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ వద్ద వక్రాలు స్పృశించుకొంటాయి.

గరిష్ఠాలు, కనిష్ఠాలు

1. మొదటి అవకలజ పరీక్ష :

(a, b) అంతరంలో $y = f(x)$ అవకలనీయ ప్రమేయం అయి $c \in (a, b)$ స్థానిక గరిష్ఠ (లేదా) స్థానిక కనిష్ఠ బిందువు అయితే $f^1(C) = 0$

2. రెండవ అవకలజ పరీక్ష:

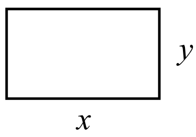
I అంతరంపై ప్రమేయం f, $c \in I$ వద్ద రెండుసార్లు అవకలనీయం అయితే

$\rightarrow f^1(C) = 0, f^{11}(C) < 0$ అయితే, $x=c$ స్థానిక గరిష్ఠ బిందువు f గరిష్ఠ విలువ $f(c)$

$\rightarrow f^1(C) = 0, f^{11}(C) > 0$ అయితే, $x=c$ స్థానిక కనిష్ఠ బిందువు, f కనిష్ఠ విలువ $f(c)$

1. దీర్ఘ చతురస్ర చుట్టు కొలత 20 స్థిరంగా ఉంటూ ఏర్పడే దీర్ఘ చతురస్రాల వైశాల్యాలలో గరిష్ఠ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దీర్ఘ చతురస్ర పొడవు, వెడల్పులు, వరుసగా x, y అనుకొనుము.



$\therefore 2(x + y) = 20$ .... (1)

$\Rightarrow x + y = 10$ ....(2)

దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం $A = x.y.$ .... (3)

$A = x . (10 - x) \quad \because x + y = 10$

$A = 10x - x^2$ .... (4)

ఇరువైపుల దృష్ట్య అవకలనం చేయగా

TSBIE

$$\frac{dA}{dx} = 10 - 2x \qquad .... (5)$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 10 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = 10$$

$$\Rightarrow x = 5$$

$\therefore$ A విరామ బిందువు = 5

eqn ... (5) x దృష్ట్య అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -2$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} < 0$$

$\therefore$ దీర్ఘ చతురస్రం వైశాల్యం $x = 5$ వద్ద గరిష్ఠం

(రెండో అవకలణ పరీక్ష నుండి)

$x + y = 10$

$\because \ x = 5 \Rightarrow y = 5$

$A = x \cdot y$

$= 5 \cdot 5$

$= 25$

TSBIE

2. ఒక కంపెనీ రోజుకు x వస్తువులు అమ్మగా వచ్చే లాభ ప్రమేయం $P(x) = (150 - x)x - 1600$: కంపెనీ గరిష్ఠ లాభం పొందడానికి అ కంపెనీ ఎన్ని వస్తువులను తయారు (ఉత్పత్తి) చేయాలో కనుక్కోండి. గరిష్ఠ లాభాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $P(x) = (150 - x)\, x - 1600$

$= 150x - x^2 - 1600$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dp}{dx} = 150 - 2x \qquad ..... (1)$$

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

$\Rightarrow \ 150 - 2x = 0$

$2x = 150$

$x = 75$

Eqn .... (1) ని దృష్ట్య అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^2p}{dx^2} = -2$$

$$\frac{d^2p}{dx^2} < -2$$

$\therefore$ $x = 75$ వద్ద $P(x)$ గరిష్ఠము

$\therefore$ కంపెని గరిష్ఠ లాభం రావడానికి రోజుకి 75 వస్తువులు తయారు చేయాలి.

గరిష్ఠ విలువు $P(75) = (150 - 75) \cdot 75 - 1600$

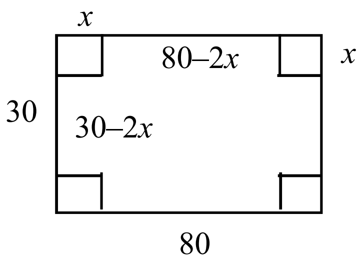
$= 75 \times 75 - 1600$

$= 5625 - 1600$

గరిష్ఠ లాభం $= 4025.$

3. 30 సెం.మీ. × 80 సెం.మీ కొలతలుగా ఉండే దీర్ఘ చతురస్రాకారపు రేకు ముక్క యొక్క నాలుగు మూలల నుంచి x భుజంగా ఉండే చతురస్రాకార ముక్కలను కత్తిరించి మిగిలిన రేకును మడిచి మూత లేని పెట్టెను తయారు చేయిస్తారు. అ పెట్టె ఘన పరిమాణం గరిష్ఠంగా ఉండటానికి x విలువను కనుక్కోండి.

సాధన:



పెట్టె యొక్క పొడవు = $80 - 2x$

పెట్టె యొక్క వెడల్పు = $30 - 2x$

పెట్టె ఎత్తు = x

ఘన పరిమాణం $v = (80 - 2x)(30 - 2x) \cdot x$

$= (2400 - 160x - 60x + 4x^2) \cdot x.$

$= 4x^3 - 220x^2 + 2400x$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dv}{dx} = 12x^2 - 440x + 2400 \qquad ..... 91)$$

$$\frac{dv}{dx} = 10$$

$12x^2 - 440x + 2400 = 0$

$3x^2 - 110x + 600 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

TSBIE

$$= \frac{110 \pm \sqrt{(110)^2 - 4 \times 3 \times 600}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{110 \pm \sqrt{12100 - 7200}}{6}$$

$$= \frac{110 \pm \sqrt{4900}}{6}$$

$$= \frac{110 \pm 70}{6}$$

$$= \frac{110 + 70}{6} \qquad = \frac{110 - 70}{6}$$

$$= \frac{180}{6} \qquad = \frac{40}{6}$$

$$= 30 \qquad = \frac{20}{3}$$

$x = 30 \quad b = 30 - 2 \times 30$

$= -30$

$b < 0$

$\therefore \quad x \neq 30$

$\therefore \quad x = \frac{20}{3}$

Eqn ..... (1) ని x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 24x - 440$$

$x = \frac{20}{3}$ కి $\frac{d^2v}{dx^2} = 24 \times \frac{20}{3} - 440$

$= 160 - 440$

$= -280$

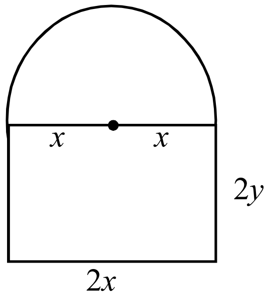
$$\frac{d^2v}{dx^2} < 0$$

$x = \frac{20}{3}$ వద్ద పెట్టె ఘనపరిమాణం గరిష్ఠము.

TSBIE

4. దీర్ఘ చతురస్రం పై అర్ధవృత్తం ఉన్న అకారంలో ఉన్న కిటికీ చుట్టు కొలత 20 అడుగులు ఉండేటట్లు తయారు చేసే కిటికిలన్నింటికి వైశాల్యాలలో గరిష్ఠ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన:



కిటికి చుట్టు కొలత $= 22 + 2y = \pi x = 20$

$$2y = 20 - (\pi + 2)\, x.$$

$$y = 10 - \frac{\pi + 2}{2} \cdot x$$

వైశాల్యము = $2xy + \dfrac{\pi x^2}{2}$

$$A = \left(20 - (\pi + 2) \cdot x\right) + \frac{\pi x^2}{2}$$

$$= 20 - (\pi + 2) x^2 + \frac{\pi x^2}{2}$$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dA}{dx} = 20 - (\pi + 2) \cdot 2x + \frac{\pi}{2} \times 2x \qquad \text{..... 91)}$$

$$\frac{dA}{dx} = 0$$

$$20 - (\pi + 2) + x = 0$$

$$x\,(\pi - 2\pi - 4) = -20$$

$$x\,(-\pi - 4) = -20$$

$$x\,(\pi + 4) = 20$$

$$x = \frac{20}{\pi + 4}$$

Eqn (1) ని x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -\ (\pi + 2) \times 2 + \pi$$

$$= -2\pi - 4 + \pi$$

$$= -\pi - 4$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} < 0$$

TSBIE

$x = \frac{20}{\pi + 4}$ వద్ద కిటికి వైశాల్యము గరిష్ఠము

$A = 2 \times y + \frac{\pi}{2} \cdot x^2$

$2y = 20 - (\pi + 2)x$

$2y = 20 - (\pi + 2) \times \frac{20}{\pi + 4}$

$2y = \frac{20\pi + 80 - 20\pi - 40}{\pi + 4}$

$= \frac{40}{\pi + 4}$

$A = 2xy + \frac{\pi}{2} \cdot x^2$

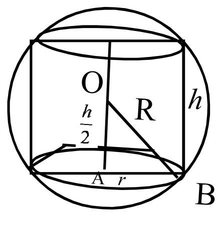
$= \frac{20}{\pi + 4} \cdot \frac{40}{\pi + 4} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{20}{\pi + 4}\right)^2$

$= \frac{1600 + 400 \cdot \pi}{2(\pi + 4)^2}$

$= \frac{200(4 + \pi)}{(\pi + 4)2}$

$= \frac{200}{\pi + 4}$

5. ***r* వ్యాసార్ధం గల గోళంలో అంతర్లిఖిత స్థూపాలలో (లంబవృత్త) వక్రతల వైశాల్యం గరిష్ఠమయ్యే స్థూపం ఎత్తు $\sqrt{2}.r$ అని చూపండి.**



సాధన: Δ OAB నుండి

$OA^2 + AB = OB^2$

$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R2$

$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$

TSBIE

స్థూపం వక్రతల వైశాల్యం $= 2\pi rh$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} \cdot h$$

$$A = \frac{2\pi \cdot h}{2} \cdot \sqrt{4R^2 - h^2}$$

$$A = \pi \cdot h\sqrt{4R^2 - h^2}$$

ఇరువైపుల 'h' దృష్ట్య అవకలనం చేయగా

$$\frac{dA}{dh} = \pi \left\{ 1.\sqrt{4R^2 - h^2} + \frac{h.1.(-2h)}{2\sqrt{4R^2 - h^2}} \right\}$$

$$\frac{dA}{dh} = \pi \cdot \left\{ \frac{4R^2 - h^2 - h^2}{\sqrt{4R^2 - h^2}} \right\}$$

$$= \pi \cdot \left\{ \frac{4R^2 - 2h^2}{\sqrt{4R^2 - h^2}} \right\}$$

$$\frac{dA}{dh} = 0$$

$$\pi \cdot \left\{ \frac{4R^2 - 2h^2}{\sqrt{4R^2 - h^2}} \right\} = 0$$

$$4R2 - 2h2 = 0$$

$$h = \sqrt{2} \cdot R.$$

Eqn (1) ని h దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^2 A}{dh^2} = 2\pi \cdot \left\{ \frac{\sqrt{4R^2 - h^2} \cdot (-2h) - \frac{(2R^2 - h^2)}{2\sqrt{4R^2 - h^2}} \cdot (-2h)}{4e^2 - h^2} \right\}$$

TSBIE

$$= 2\pi \cdot \left\{ \frac{-8R^2h + 2h^3 + 2R^2h - h^3}{\left(4e^2 - h^2\right)\left(\sqrt{4R^2 - 4^2}\right)} \right\}$$

$$= 2\pi \cdot \left\{ \frac{-8R^2h + 2h^3 + 2R^2h - h^3}{4R^2 - h^2 \cdot \sqrt{4e^2 - h^2}} \right\}$$

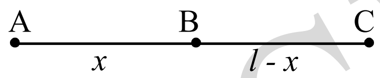
$$= \frac{-4\pi h}{\sqrt{4R^2 - h^2}} < 0, \quad h = \sqrt{2}R$$ అయినప్పుడు

$\therefore$ స్థూపము $\frac{d^2 4}{ah^2} < 0$ ప్రక్క తలవైశాల్యం = $\sqrt{2}R$ వద్ద గరిష్ఠము

స్థూపము ఎత్తు = $\sqrt{2}R$

6. ***l పొడవు ఉండే తీగను రెండు ముక్కలు చేసి ఒక ముక్కను చతురస్రాకారంగాను, రెండో ముక్కను వృత్తకారంగాను వంచగా ఏర్పడిన వైశాల్యాల మొత్తం కనిష్ఠం కావలంటే ఆ ముక్కల పొడవులు ఎంత?***

సాధన:



x పొడవుగల ముక్కతో చతురస్రం, $l - x$ పొడవు గల ముక్కతో వృత్తం తయారు చేసిన

చతురస్ర భుజం $= \frac{x}{4}$

వైశాల్యము $= \left(\frac{x}{4}\right)^2$

వృత్తపరిధి $2\pi r = l - x$

$$r = \frac{l - x}{2\pi}$$

వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$

$$= \pi \cdot \left(\frac{l - x}{2\pi}\right)^2$$

వైశాల్యాల మొత్తము $A = \frac{x^2}{16} + \frac{(l - x)^2}{4\pi}$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

TSBIE

$$\frac{dA}{dx} = \frac{2x}{16} + \frac{2(l-x)}{4\pi}\cdot(-1) \qquad \text{..... (1)}$$

$$\frac{dA}{dx} = 0$$

$$= \frac{2x}{16} - \frac{2(l-x)}{4\pi} = 0$$

$$\frac{x}{8} - \frac{l-x}{2\pi} = 0$$

$$= \frac{\pi \cdot x - 4l + 4x}{8\pi} = 0$$

$$x(\pi + 4) = 4l$$

$$x = \frac{4l}{\pi + 4}$$

Eqn.... (1) ని x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dA^2}{dx^2} = \frac{1}{8} - \frac{(-1)}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} > 0$$

$\therefore x = \dfrac{4l}{\pi + 4}$ వద్ద A విలువ కనిష్ఠము

$$l - x = l - \frac{4l}{\pi + 4}$$

$$= \frac{\pi l + 4l - 4l}{\pi + 4}$$

$$= \frac{\pi l}{\pi + 4}$$

*****

TSBIE